Erősen kváziöröklődő algebrák

Schefler Barna

2021. május 14.

A kváziöröklődő algebra (4. definíció) egy viszonylag új fogalom a gyűrűelméletben, az 1980-as évek végén vezette be E. Cline, B. Parshall és L. Scott. Az [1] cikk nyomán kváziöröklődőnek fogunk nevezni egy olyan A algebrát, amelyben rekurzívan konstruálhatunk egy olyan A-ba felérő ideálláncot, melynek elemei adott tulajdonsággal rendelkező idempotens ideálok. Az ideállánc hosszából egy felső korlátot kapunk az algebra globális dimenziójára is (13. állítás).

Iyama egyik cikkében [3] levezette, hogy ha veszünk egy Λ artin algebrát, és egy X végesen generált Λ-modulust, akkor ehhez találhatunk egy olyan Y Λ-modulust, hogy ekkor $\Gamma = End(X \oplus Y)$ kváziöröklődő lesz (9. tétel). E tétel olyan szempontból érdekes számunkra, hogy ebben az esetben Γ globális dimenziójára egy olyan felső becslést kapunk, mely jobb, mint a tetszőleges kváziöröklődő algebra globális dimenziójára vonatkozó becslés. Ringel megmutatta, hogy Iyama konstrukciójára teljesül egy, a kváziöröklődőségnél erősebb tulajdonság, és ezen speciális tulajdonság segítségével bevezette az erősen kváziöröklődő algebrák fogalmát [2].

A mostani beszámolóban az erősen kváziöröklődő algebrákat tanulmányozunk. A könnyebb átláthatóság érdekében bevezetek néhány olyan fogalmat, mely már az őszi beszámolóban is előkerült. A definíciókat és tételeket ismét szemléletes példákon és ellenpéldákon keresztül próbáljuk megérteni.

1. Definíció. *Egy R kommutatív artin gyűrű feletti végesen generált Λ algebrát artin algebrának nevezünk.*

Az általánosság kedvéért a definíciókban artin algebrát fogunk használni, a gyakorlatban azonban a legtöbbször helyettesíthetjük ezt test feletti véges dimenziós algebrával.

2. Definíció. *Legyen J a Λ egységelemes artin algebra Jacobson radikálja. Λ-nak egy I ideálja örökletes, ha:*

1. *$I^2 = I$, azaz I idempotens*
2. *$IJI = 0$ (ezt Schur tulajdonságnak fogjuk nevezni)*
3. *I_Λ projektív, mint jobb Λ-modulus*

Az idempotens ideálok megértésében segít a következő lemma:

3. Lemma. *Ha $e \in \Lambda$ egy idempotens elem, akkor az e által generált ideál idempotens, azaz $(\Lambda e \Lambda)^2 = (\Lambda e \Lambda)$. Megfordítva, ha Λ artin algebra, és $I^2 = I$ teljesül az I ideálra, akkor létezik egy e idempotens elem úgy, hogy $I = \Lambda e \Lambda$.*

4. Definíció. *Egy Λ artin algebrát kváziöröklődőnek nevezünk, ha létezik egy olyan*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_n = \Lambda$$

örökletes ideállánca, melyre I_t/I_{t-1} a Λ/I_{t-1} örökletes ideálja, minden $1 \leq t \leq n$-re.

Mivel Λ artin, Λ/J féligegyszerű, így a Λ/J feletti egyszerű modulusok száma véges. Ugyanakkor a Λ/J feletti egyszerű modulusok pontosan azok, amelyek Λ felett is egyszerűek, így ezek száma is véges.

5. Jelölés. *$\mathcal{S}$-sel jelöljük az egyszerű jobb oldali Λ-modulusok izomorfizmusosztályainak halmazát. Egy $S \in \mathcal{S}$ egyszerű modulus projektív fedője legyen $P(S)$.*

A fentivel ekvivalens definícót kapunk, ha bevezetjük a Δ-filtrálás fogalmát:

6. Definíció. *Legyen adott egy $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, ..., n\}$ (nem feltétlenül bijektív) hozzárendelés. (Abban az esetben, amikor l bijektív, ez megad egy rendezést az egyszerűek halmazán.) Ekkor $\Delta(S)$ a $P(S)$ legnagyobb olyan faktora, melynek az összes S' kompozíciófaktorára $l(S') \leq l(S)$ teljesül. (Vegyük észre, hogy $\Delta(S)$ definíciója egyértelmű.) Ekkor $\Delta(S)$-t az S-hez tartozó standard modulusnak nevezzük. Ezek halmaza $\Delta = \{\Delta(S) \mid S \in \mathcal{S}\}$. $\mathcal{F}(\Delta)$-nak nevezzük Mod-Λ azon részkategóriáját, amelyben minden modulus Δ-filtrált, azaz $M \in \mathcal{F}(\Delta)$ pontosan akkor, ha:*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_l = M$$

úgy, hogy minden i-re M_i/M_{i-1} izomorf Δ egyik elemével.

A legtöbb esetben Λ bázisalgebrával fogunk dolgozni. Erre teljesül, hogy az egységelem előáll, mint véges sok primitív ortogonális idempotens összege: $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, ahol $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, és semely e_i sem bontható tovább. Ilyen esetben $\Delta(S(i)) = e_i\Lambda/\varepsilon_i\Lambda$, ahol

$$\varepsilon_i = \sum_T e_j \text{ és } T = \{j : j \neq i;\ l(S(j)) \geq l(S(i))\}.$$

Most pedig tekintsük a kváziöröklődőség ekvivalens definícióját, melyet a Δ-filtrálás segítségével fogalmazunk meg:

7. Definíció. *Egy Λ artin algebra kváziöröklődő az $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, ...n\}$ hozzárendelésre nézve, ha minden $S \in \mathcal{S}$-re létezik egy egzakt sorozat:*

$$R(S) \to P(S) \to \Delta(S) \to 0$$

melyre az alábbiak teljesülnek:

1. *$R(S)$ olyan $P(S'')$ projektív modulusok direktösszege, melyekre $l(S'') > l(S)$*
2. *ha S' a rad $\Delta(S)$ kompozíciófaktora, akkor $l(S') < l(S)$*
3. *minden $S \in \mathcal{S}$-re $P(S)$ Δ-filtrált.*

(Figyeljünk arra, hogy $R(S) \to P(S)$-nél nincs megkövetelve az injektivitás!)

A fent megadott l hozzárendelés határozza meg a kváziöröklődő sorrendet. Legyen

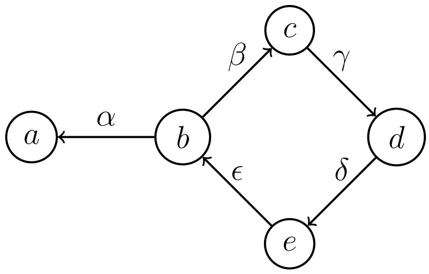
$$T_1 = \{i \in \{1, 2, \ldots n\} |\ l(S(i)) \text{ értéke maximális } \}$$

Legyen I a $\{P(i) : i \in T_1\}$ által generált kétoldali ideál. Ekkor a megadott feltételek garantálják, hogy I örökletes ideál legyen Λ-ban. Ezután, legyen

$$T_2 = \{i \in \{1, 2, \ldots n\} - T_1 |\ l(S(i)) \text{ értéke maximális } \}$$

Ekkor a T_2-beli projektívek által generált kétoldali ideál örökletes lesz Λ/I-ben. Ezt az eljárást folytatva megkapjuk Λ örökletes ideálláncát az l hozzárendelésre nézve.
A legtöbb esetben l bijektív, így minden lépésben egyetlen projektív által generált kétoldali ideál szerint faktorizálunk. Az általánosság kedvéért azonban a definícióban megengedjük a nem bijektív esetet is.

Kövessük figyelemmel az alábbi példát, melyben kiszámoljuk a Δ-kat egy rögzített l sorrendre. Ezután észrevehetjük, hogy az l megváltoztatásával a Δ-k is változnak, mely azt mutatja, hogy a kváziöröklődő tulajdonság függ az l megválasztásától. (Azaz előfordulhat, hogy egy algebra egy adott sorrenddel kváziöröklődő, de egy másikkal nem az.)



1. ábra. A gráfja

Legyen A az 1. ábrán látható gráfhoz tartozó gráfalgebra, amikor az $\gamma\delta = 0$; $\delta\epsilon = 0$ relációkkal faktorizálunk! Ekkor:

$$A_A = \; a \oplus \begin{smallmatrix} & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix}$$

A csúcsokhoz tartozó egyszerűek először legyenek ábécé sorrendben számozva, azaz $l(a) = 1$, ..., $l(e) = 5$. Ezt kapjuk:

$$A_A = \; a \oplus \begin{smallmatrix} & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix}$$

Vagyis az adott l esetén $\Delta(e) = \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix}$; $\Delta(d) = d$; $\Delta(c) = c$; $\Delta(b) = \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$; $\Delta(a) = a$, amelyről nyilvánvalóan látszik, hogy nem kváziöröklődő sorrend, mivel az ötödik idempotens által generált ideál nem projektív.

Ha most az $l'(a) = 1$; $l'(b) = 4$; $l'(c) = 5$; $l'(d) = 3$; $l'(e) = 2$; sorrendet tekintjük:

$$A_A = \; a \oplus \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}$$

Így pedig $\Delta(c) = \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}$; $\Delta(b) = \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$; $\Delta(d) = \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix}$; $\Delta(e) = e$; $\Delta(a) = a$, melyek egy kváziöröklődő sorrendet adnak. (A Δ-filtrálást a színek mutatják.)

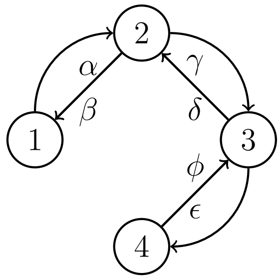
A kváziöröklődő algebrák globális dimenziójára igaz az alábbi becslés:

8. Állítás. *Egy Λ kváziöröklődő algebrára, melynek örökletes ideállánca:*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_n = \Lambda$$

teljesül, hogy gl dim$\Lambda \leq 2n - 2$.

Ez a becslés lehet persze éles is, vegyük ehhez a 2. ábrán szereplő B gráfalgebrát, mikor az $\alpha\gamma = \gamma\epsilon = \delta\beta = \phi\delta = \gamma\delta - \beta\alpha = \epsilon\phi - \delta\gamma = \phi\epsilon = 0$ által generált ideállal faktorizálunk. Ekkor az $l(S(i)) = i$ sorrendre nézve kváziöröklődő algebrát kapunk:



2. ábra. B gráfja

$$B_B = \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$$

Látszik továbbá az is, hogy semmilyen más sorrendben nem kaphatunk kváziöröklődő algebrát. Ugyanis $P(1)$-re, $P(2)$-re és $P(3)$-ra nem teljesül a Schur tulajdonság, így azokkal nem kezdhetünk (hiszen azon i-re, melyre $l(i)$ maximális, $\Delta(i) = P(i)$). Sőt B/Be_4B-ben is csak $P(3)$ faktorára teljesül (és így tovább). Vagyis az örökletes lánc hossza 4. A fenti becslés szerint $gl\ dim\ B \leq 6$, de itt $gl\ dim\ B = 6$ teljesül, mivel $S(4)$ projektív dimenziója 6:

$$0 \to \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \to 4 \to 0$$

Most pedig rátérhetünk Iyama eredményére:

9. Tétel. ***(Iyama)*** *Legyen Λ egy artin algebra, X egy végesen generált Λ-modulus. Ekkor létezik egy Y Λ-modulus, hogy $\Gamma = End(X \oplus Y)$ kváziöröklődő, n hosszú örökletes lánccal. Erre a Γ-ra az is teljesül, hogy $gl\ dim\ \Gamma \leq n$.*

A globális dimenzióra vonatkozó becslést Ringel [2] cikke magyarázza. Ő a projektív modulusok egy speciális tulajdonságából vezeti le Iyama eredményét, s az ilyen kváziöröklődő algebrákat erősen kváziöröklődőnek nevezi.

10. Definíció. *Legyen Λ egy artin algebra, ebben jelölje $\mathcal{S}$ az egyszerű modulusok izomorfizmusosztályainak halmazát, továbbá $P(M)$ az M modulus projektív fedőjét!*

Λ jobbról erősen kváziöröklődő (RSQH), ha minden $S \in \mathcal{S}$-re a következő sorozat egzakt:

$$0 \to R(S) \to P(S) \to \Delta(S) \to 0$$

és létezik egy $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, ...n\}$ hozzárendelés, mely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1. *$R(S)$ olyan $P(S'')$ projektív modulusok direkt összege, melyekre $l(S'') > l(S)$*
2. *ha S' a $rad\Delta(S)$ kompozíciófaktora, akkor $l(S') < l(S)$*

Λ balról erősen kváziöröklődő (LSQH), ha létezik egy olyan $l' : \mathcal{S} \to \{1, 2, ...n\}$ hozzárendelés, mely szerint Λ^{op} jobbról erősen kváziöröklődő.

Λ erősen kváziöröklődő (SQH), ha létezik egy olyan közös $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, ...n\}$ hozzárendelés, mely szerint Λ és Λ^{op} is jobbról erősen kváziöröklődő.

11. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a 7. definíció szerint egy jobbról erősen kváziöröklődő algebra egyben kváziöröklődő is ugyanarra az l hozzárendelésre nézve. (Most ugyanis az $R(S) \to P(S)$ leképezés injektivitása miatt atomatikusan teljesül a kváziöröklődőség definíciójában szereplő 3., fitráltsági feltétel.)*

Érdemes kimondani az RSQH tulajdonság egy másik jellemzését is.

A 10. definícióban előforduló egzakt sorozat garantálja, hogy egy RSQH algebrában minden $\Delta(i)$ projektív dimenziója legfeljebb 1. Megfordítva, ha egy olyan kváziöröklődő algebrát veszünk, melyben minden $\Delta(i)$ projektív dimenziója legfeljebb 1, akkor a 7. definícióban szereplő egzakt sorozatban a $R(S) \to P(S)$ leképezés injektívvé válik, vagyis éppen egy RSQH algebrát kapunk. Tehát igaz az alábbi jellemzés:

12. Állítás. *Egy Λ artin algebra pontosan akkor RSQH algebra az l hozzárendeléssel, ha Λ kváziöröklődő az l hozzárendeléssel, és minden Δ projektív dimenziója legfeljebb* 1.

A jobbról erősen kváziöröklődő algebrák globális dimenziójára a felső becslés jobb, mint a tetszőleges kváziöröklődő algebra globális dimenziójára vonatkozó becslés:

13. Állítás. *Legyen Λ jobbról erősen kváziöröklődő algebra, melynek örökletes ideállánca:*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_n = \Lambda$$

Ekkor gl dim$\Lambda \leq n$.

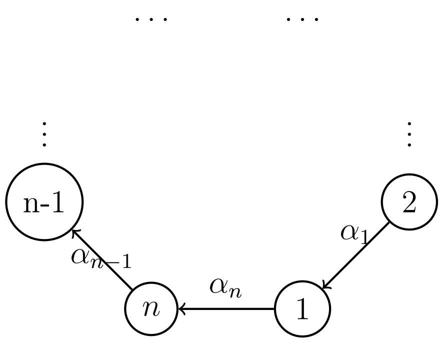
Az előző esethez hasonlóan, itt is lehet éles a becslés. Ehhez vegyük az 1, 2, ... n csúcsokkal rendelkező irányított kört (3. ábra), melynek α_i éle $i + 1$-ből i-be mutat (és α_n 1-ből n-be). Legyen Γ a fenti gráfhoz tartozó gráfalgebra faktora az $\alpha_i \alpha_{i-1} = 0$ $(1 \leq i < n)$ által generált ideálnál! Ekkor:

$$\Gamma_\Gamma = \begin{smallmatrix} 1 \\ n \\ n-1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \; ... \; \oplus \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix}$$

Az $l(S(i)) = i$ sorrendben $j \geq 2$-re $\Delta(j) = P(j)$, azaz $R(j) = 0$; míg $j = 1$-re $\Delta(1) = S(1)$, és kapjuk a

$$0 \to \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ n \\ n-1 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0$$

egzakt sort. Mivel az adott sorrendre a kváziöröklődőség is nyilvánvalóan adódik, kapjuk, hogy Γ jobbról erősen kváziöröklődő. Ugyanakkor az is látszik, hogy *pr dim* $S(i) = i$, így *gl dim* $\Gamma = n$.



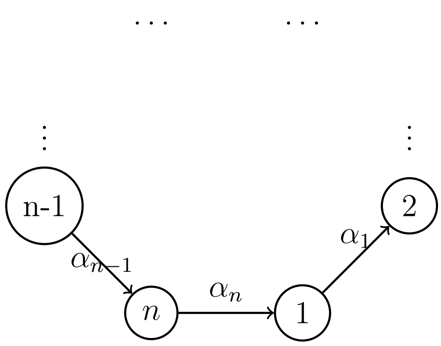
3. ábra. Γ gráfja

Ugyanezen a példán azt is ellenőrizhetjük, hogy létezik olyan algebra, mely jobbról erősen kváziöröklődő egy adott sorrendre, balról azonban nem erősen kváziöröklődő ugyanerre a sorrendre.

Ehhez Γ^{op}-ot kell vizsgáljuk. Az irányítatlan gráfstruktúra megmarad, viszont a nyilakat most az ellenkező irányítással látjuk el, a faktorizáló relációk is megfordulnak, vagyis $\alpha_{i-1}\alpha_i = 0$-kat kapunk $(1 \leq i < n)$.

$$\Gamma^{op}_{\Gamma^{op}} = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{smallmatrix} n-2 \\ n-1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} n-1 \\ n \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix}$$

Ha ugyancsak az $l(S(i)) = i$ sorrendet tekintjük, akkor $\Delta(n) = P(n)$, és az összes többi j-re $\Delta(j) = S(j)$. Azonban ezekre a j-kre *pr dim* $S(j) = n - j$, így nem létezhet az erősen kváziöröklődőséghez szükséges egzakt sor. Vagyis Γ balról nem erősen kváziöröklődő az l sorrendre.



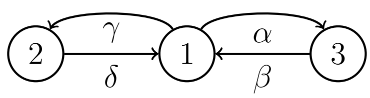
4. ábra. Γ^{op} gráfja

Hasonló ellenpédát ad a Nakayama-algebrák másik típusa is:

14. Példa. *Legyen Λ egy olyan Nakayama algebra, melynek gráfja egy n hosszú lánc, (melyben a nyilak a nagyobb számoktól a kisebbek felé mutatnak) és van benne legalább egy reláció. Ekkor Λ jobbról erősen kváziöröklődő az $l(S(i)) = i$ sorrendre nézve, hiszen $\Delta(i) = P(i)$. Balról azonban nem lesz erősen kváziöröklődő erre a sorrendre, hiszen ekkor a $\Delta(i) = S(i)$, és a reláció létezése miatt lesz olyan j, melyre pr dim $S(i) > 1$.*

A következő példában azt mutatjuk be, hogy létezik olyan algebra, mely egy adott rendezésre jobbról erősen kváziöröklődő, balról azonban nem erősen kváziöröklődő semmilyen rendezésre sem, vagyis jogos a fenti definíció, hogy megkülönböztetünk jobb- és baloldali erősen kváziöröklődőséget.

Legyen D a 5. ábrán látható gráf faktora a $\delta\gamma = \delta\alpha = \beta\alpha = \beta\gamma\delta = 0$ relációk által generált ideál szerint!

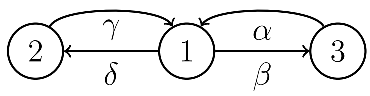


5. ábra. D gráfja

$$D_D = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$$

Az $l(S(i)) = i$ rendezéssel nyilvánvalóan egy kváziöröklődő algebra, $\Delta(2) = P(2)$; $\Delta(3) = P(3)$ valamint $R(1) = P(2) \oplus P(3)$ projektív, így erre a sorrendre D jobbról erősen kváziöröklődő.

Tekintsük most a D^{op} oppozit algebrát, melyet úgy írhatunk le, hogy az eredeti gráfon a nyilak, valamint a relációk sorrendje megváltozik: $\gamma\delta = \alpha\delta = \alpha\beta = \delta\gamma\beta = 0$.



6. ábra. D^{op} gráfja

$$D^{op}_{D^{op}} = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$$

Látható, hogy D^{op} csakis az $l(S(i)) = i$ rendezéssel lesz kváziöröklődő algebra, (mely szükséges feltétele a jobbról erősen kváziöröklődőségnek). Így ha erre a sorrendre nem jobbról erősen kváziöröklődő, akkor D^{op} semmilyen sorrendben sem lehet jobbról erősen kváziöröklődő, vagyis D semmilyen sorrendben sem lesz balról erősen kváziöröklődő. Mivel $\Delta(1) = S(1)$, melynek projektív dimenziója $2 > 1$:

$$0 \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0$$

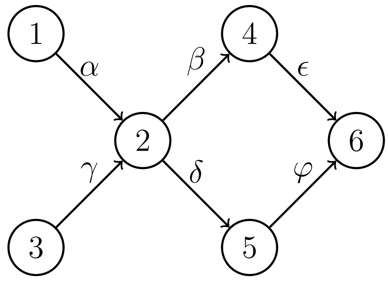
kapjuk, hogy a fenti algebra valóban olyan, hogy az $l(S(i)) = i$ sorrenddel jobbról erősen kváziöröklődő, de balról semelyik sorrenddel sem erősen kváziöröklődő.

Az erősen kváziöröklődő (SQH) algebrákra még erősebb dimenziókorlát teljesül:

15. Állítás. *Ha Λ erősen kváziöröklődő (azaz mindkét oldalról erősen kváziöröklődő ugyanarra a rögzített sorrendre), akkor gl dim $\Lambda \leq 2$.*
A megfordítás azonban csak részben igaz: ha gl dim $\Lambda \leq 2$, akkor Λ balról erősen kváziöröklődő, jobbról erősen kváziöröklődő, de nem feltétlenül erősen kváziöröklődő.

Az alábbiakban mutatunk egy példát a 15. állítás második felére, vagyis egy olyan ≤ 2 globális dimenziójú algebrára, mely nem erősen kváziöröklődő.

Tekintsük ehhez azt a G algebrát, amit a 7. ábrán látható gráfból kapunk, ha a következő relációkkal faktorizálunk: $\alpha\beta = \gamma\delta = \beta\epsilon - \delta\varphi = 0$. Ekkor:



7. ábra. G gráfja

$$G_G = \begin{smallmatrix}1\\2\\5\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\4&&5\\&6&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix} \oplus 6$$

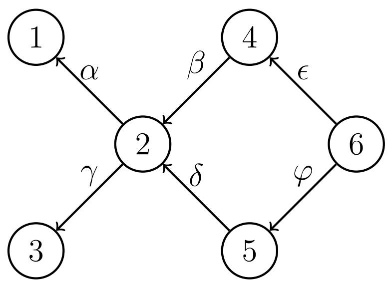
$$0 \to \begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\4&&5\\&6&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\5\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$$
$$0 \to 6 \to \begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\4&&5\\&6&\end{smallmatrix} \to 2 \to 0$$
$$0 \to \begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\4&&5\\&6&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\\4\end{smallmatrix} \to 3 \to 0$$

Így $pr\ dim\ S(1) = pr\ dim\ S(2) = pr\ dim\ S(3) = 2$, míg a többi esetben: $pr\ dim\ S(4) = pr\ dim\ S(5) = 1$; $pr\ dim\ S(6) = 0$, vagyis G_G valóban olyan, hogy $gl\ dim\ G_G = 2$.
Másrészről az is látszik, hogy G jobbról erősen kváziöröklődő az $l(S(6)) = 6$; $l(S(3)) = 5$; $l(S(1)) = 4$; $l(S(2)) = 3$; $l(S(5)) = 2$; $l(S(4)) = 1$ sorrendre nézve:

$$G_G = \begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\4&&5\\&6&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\5\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\4\end{smallmatrix} \oplus 6$$

Ugyanis l egy olyan kváziöröklődő sorrendet határoz meg, melyben a Δ-k projektív dimenziója 0 ($\Delta(6)$, $\Delta(3)$ és $\Delta(1)$ esetében) vagy 1 ($\Delta(2)$, $\Delta(5)$ és $\Delta(4)$ esetében).

Ha pedig G^{op}-ot nézzük a 8. ábrán (fordított nyilak és relációk), akkor jelöljük '-vel a G^{op}-hoz tartozó egyszerűeket és deltákat, hogy megkülönböztessük a G-beliektől. Így:



8. ábra. G^{op} gráfja

$$G^{op}_{G^{op}} = 1 \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&6&\\4&&5\\&2&\end{smallmatrix}$$

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\3\end{smallmatrix} \to 4 \to 0$$
$$0 \to 3 \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}5\\2\\1\end{smallmatrix} \to 5 \to 0$$
$$0 \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}4\\2\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&6&\\4&&5\\&2&\end{smallmatrix} \to 6 \to 0$$

Tehát $pr\ dim\ S'(1) = pr\ dim\ S'(3) = 0$; $pr\ dim\ S'(2) = 1$ és $pr\ dim\ S'(4) = pr\ dim\ S'(5) = pr\ dim\ S'(6) = 2$, így $gl\ dim\ G^{op} = 2$, ami persze megegyezik $gl\ dim\ G$-vel.
Továbbá, G^{op} jobbról erősen kváziöröklődő az $l'(S(i)) = i$ sorrendre nézve (melyben $pr\ dim\ \Delta'(2) = 1$, az összes többire pedig 0):

$$G_{G^{op}}^{op} = 1 \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 6 & \\ 4 & & 5 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$$

Be kell még látni, hogy nincs olyan l_0 rendezés, melyre G és G^{op} egyszerre jobbról erősen kváziöröklődő. Tegyük fel indirekt, hogy van ilyen l_0. Ekkor vehetjük azon i-t melyre bármely j-re $l_0(i) < l_0(j)$ (vagyis $l_0(i)$ a lehető legkisebb). Ekkor $\Delta_0(i) = \Delta_0'(i) = S(i) = S'(i)$. Láttuk azonban, hogy minden i-re $pr\ dim\ S(i) = 2$, vagy $pr\ dim\ S'(i) = 2$, és ez ellentmondana az SQH tulajdonságnak (ott ugyanis a Δ-k projektív dimenziója legfeljebb 1).

Hivatkozások

[1] VLASTIMIL DLAB - CLAUS MICHAEL RINGEL, *Quasi-hereditary algebras*, Illinois Journal of Mathematics Volume 33, Number 2, Pages 280-291, Summer 1989

[2] CLAUS MICHAEL RINGEL, *Iyama's finiteness theorem via strongly quasi-hereditary algebras*, J. Pure Appl. Algebra, 214, no. 9, Pages 1687–1692, 2010

[3] OSAMU IYAMA, *Finiteness of representation dimension*, Proceedings of the American Mathematical Society Volume 131. Number 4, Pages 1011-1014, 2003

[4] MAYU TSUKAMOTO, *Strongly quasi-hereditary algebras and rejective subcategories*, Nagoya Mathematical Journal, Volume 237, Pages 10-38, March 2020