Erősen kváziöröklődő algebrák

Schefler Barna

Áttekintés

A kváziöröklődő algebra fogalmát az 1980-as évek végén vezette be E. Cline, B. Parshall és L. Scott. Kváziöröklődőnek nevezünk egy olyan Λ algebrát, amelyben rekurzívan konstruálhatunk egy olyan Λ-ba felérő ideálláncot, melynek elemei adott tulajdonsággal rendelkező idempotens ideálok. Az ideállánc hosszából egy felső korlátot kapunk az algebra globális dimenziójára is .

Áttekintés

A kváziöröklődő algebra fogalmát az 1980-as évek végén vezette be E. Cline, B. Parshall és L. Scott. Kváziöröklődőnek nevezünk egy olyan Λ algebrát, amelyben rekurzívan konstruálhatunk egy olyan Λ-ba felérő ideálláncot, melynek elemei adott tulajdonsággal rendelkező idempotens ideálok. Az ideállánc hosszából egy felső korlátot kapunk az algebra globális dimenziójára is .

A kváziöröklődő algebrák fontosságát mutatja Iyama eredménye is [3]. Iyama megmutatta, hogy ha veszünk egy Λ artin algebrát, és egy X végesen generált Λ-modulust, akkor ehhez találhatunk egy olyan Y Λ-modulust, hogy ekkor $\Gamma = End(X \oplus Y)$ kváziöröklődő lesz. Ringel [2] megmutatta, hogy Iyama konstrukciójára teljesül egy speciális tulajdonság: bevezette az erősen kváziöröklődő algebrák fogalmát. E tétel olyan szempontból is érdekes, hogy ebben az esetben Γ globális dimenziójára jobb felső becslést kapunk, mint amit Γ kváziöröklődőségéből kapunk.

A félév során erősen kváziöröklődő algebrákkal foglalkoztam. A most következő eredmények nagyrészt Ringel 2010-es cikkéből, és az azt megelőző irodalomból származnak.

Az általánosság kedvéért a definíciókban Λ artin algebrát fog jelölni, a gyakorlatban azonban a legtöbbször helyettesíthetjük ezt test feletti véges dimenziós algebrával. Mivel Λ artin, Λ/J féligegyszerű, így a Λ/J feletti egyszerű modulusok száma véges. Ugyanakkor a Λ/J feletti egyszerű modulusok pontosan azok, amelyek Λ felett is egyszerűek, így ezek száma is véges.

Az általánosság kedvéért a definíciókban Λ artin algebrát fog jelölni, a gyakorlatban azonban a legtöbbször helyettesíthetjük ezt test feletti véges dimenziós algebrával. Mivel Λ artin, Λ/J féligegyszerű, így a Λ/J feletti egyszerű modulusok száma véges. Ugyanakkor a Λ/J feletti egyszerű modulusok pontosan azok, amelyek Λ felett is egyszerűek, így ezek száma is véges.

Jelölés

$\mathcal{S}$-sel jelöljük az egyszerű jobb oldali Λ-modulusok izomorfizmusosztályainak halmazát. Egy $S \in \mathcal{S}$ egyszerű modulus projektív fedője legyen $P(S)$.

Kváziöröklődő algebrák

Definíció

Legyen J a Λ egységelemes artin algebra Jacobson radikálja. Λ-nak egy I ideálja örökletes, ha:

1. $I^2 = I$, I *idempotens (megmutatható: egy idempotens elem generálja)*
2. $IJI = 0$ *(ezt Schur tulajdonságnak fogjuk nevezni)*
3. I_Λ *projektív, mint jobb Λ-modulus*

Kváziöröklődő algebrák

Definíció

Legyen J a Λ egységelemes artin algebra Jacobson radikálja. Λ-nak egy I ideálja örökletes, ha:

1. $I^2 = I$, *I idempotens (megmutatható: egy idempotens elem generálja)*
2. $IJI = 0$ *(ezt Schur tulajdonságnak fogjuk nevezni)*
3. I_Λ *projektív, mint jobb Λ-modulus*

Definíció

Egy Λ artin algebrát kváziöröklődőnek nevezünk, ha létezik egy olyan

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n = \Lambda$$

örökletes ideállánca, melyre I_t / I_{t-1} a Λ / I_{t-1} örökletes ideálja, minden $1 \leq t \leq n$-re.

Δ-filtrálás

A fentivel ekvivalens definícót kapunk, ha bevezetjük a Δ-filtrálás fogalmát:

Δ-filtrálás

A fentivel ekvivalens definícót kapunk, ha bevezetjük a Δ-filtrálás fogalmát:

Definíció

Legyen adott egy $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, ..., n\}$ (nem feltétlenül bijektív) hozzárendelés. (Abban az esetben, amikor l bijektív, ez megad egy rendezést az egyszerűek halmazán.) Ekkor $\Delta(S)$ a $P(S)$ legnagyobb olyan faktora, melynek az összes S' kompozíciófaktorára $l(S') \leq l(S)$ teljesül. (Vegyük észre, hogy $\Delta(S)$ definíciója egyértelmű.) Ekkor $\Delta(S)$-t az S-hez tartozó standard modulusnak nevezzük. $\Delta = \{\Delta(S) \mid S \in \mathcal{S}\}$ ezek halmaza. $\mathcal{F}(\Delta)$-nak nevezzük Mod-Λ azon részkategóriáját, amelyben minden modulus Δ-filtrált, azaz $M \in \mathcal{F}(\Delta)$ pontosan akkor, ha:

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_l = M$$

úgy, hogy minden i-re M_i/M_{i-1} izomorf Δ egyik elemével.

Δ-filtrálás

A fentivel ekvivalens definícót kapunk, ha bevezetjük a Δ-filtrálás fogalmát:

Definíció

Legyen adott egy $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, ..., n\}$ (nem feltétlenül bijektív) hozzárendelés. (Abban az esetben, amikor l bijektív, ez megad egy rendezést az egyszerűek halmazán.) Ekkor $\Delta(S)$ a $P(S)$ legnagyobb olyan faktora, melynek az összes S' kompozíciófaktorára $l(S') \leq l(S)$ teljesül. (Vegyük észre, hogy $\Delta(S)$ definíciója egyértelmű.) Ekkor $\Delta(S)$-t az S-hez tartozó standard modulusnak nevezzük. $\Delta = \{\Delta(S) \mid S \in \mathcal{S}\}$ ezek halmaza. $\mathcal{F}(\Delta)$-nak nevezzük Mod-Λ azon részkategóriáját, amelyben minden modulus Δ-filtrált, azaz $M \in \mathcal{F}(\Delta)$ pontosan akkor, ha:

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq ... \subseteq M_l = M$$

úgy, hogy minden i-re M_i/M_{i-1} izomorf Δ egyik elemével.

A kváziöröklődőség ekvivalens definíciója

Definíció

Egy Λ artin algebra kváziöröklődő az $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, ...n\}$ hozzárendelésre nézve, ha minden $S \in \mathcal{S}$-re

- *ha S' a rad $\Delta(S)$ kompozíciófaktora, akkor $l(S') < l(S)$*
- *$P(S)$ Δ-filtrált*

A kváziöröklődőség ekvivalens definíciója

A 2010-es cikkében Ringel egy ezzel ekvivalens definíciót fogalmazott meg:

Definíció

Egy Λ artin algebra kváziöröklődő az $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, \ldots n\}$ hozzárendelésre nézve, ha minden $S \in \mathcal{S}$-re létezik egy egzakt sorozat:

$$R(S) \to P(S) \to D(S) \to 0$$

melyre az alábbiak teljesülnek:

1. *$R(S)$ olyan $P(S'')$ projektív modulusok direktösszege, melyekre $l(S'') > l(S)$*
2. *ha S' a rad $D(S)$ kompozíciófaktora, akkor $l(S') < l(S)$*
3. *minden $S \in \mathcal{S}$-re $P(S)$ Δ-filtrált az l hozzárendelés szerint.*

A kváziöröklődőség ekvivalens definíciója

A 2010-es cikkében Ringel egy ezzel ekvivalens definíciót fogalmazott meg:

Definíció

Egy Λ artin algebra kváziöröklődő az $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, ...n\}$ hozzárendelésre nézve, ha minden $S \in \mathcal{S}$-re létezik egy egzakt sorozat:

$$R(S) \to P(S) \to D(S) \to 0$$

melyre az alábbiak teljesülnek:

1. *$R(S)$ olyan $P(S'')$ projektív modulusok direktösszege, melyekre $l(S'') > l(S)$*
2. *ha S' a rad $D(S)$ kompozíciófaktora, akkor $l(S') < l(S)$*
3. *minden $S \in \mathcal{S}$-re $P(S)$ Δ-filtrált az l hozzárendelés szerint.*

A két definíció megegyezik: egyrészt, $D(S) := \Delta(S)$ választással a $\Delta(S)$ definíció szerint teljesíti az itteni 1. és 2. feltételt. Másrészt, mivel $D(S)$-nek teljesítenie kell az 1. és 2. feltételt, így csakis $\Delta(S)$ lehet.

Az I szerepe

A fent megadott I hozzárendelés határozza meg a kváziöröklődő sorrendet.

$$T_1 = \{i \in \{1, 2, \dots n\} | \ I(S(i)) \text{ értéke maximális } \}$$

Legyen I a $\{P(i) : i \in T_1\}$ által generált kétoldali ideál. Ekkor a megadott feltételek garantálják, hogy I örökletes ideál legyen Λ-ban. Ezután, legyen

$$T_2 = \{i \in \{1, 2, \dots n\} - T_1 | \ I(S(i)) \text{ értéke maximális } \}$$

Ekkor a T_2-beli projektívek által generált kétoldali ideál örökletes lesz $\Lambda/$I-ben. Ezt az eljárást folytatva megkapjuk Λ örökletes ideálláncát az I hozzárendelésre nézve.

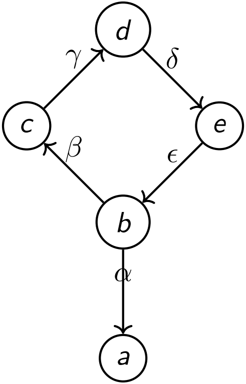
Δ-k számolása l függvényében

A az ábrán látható gráfhoz tartozó gráfalgebra, amikor az $\gamma\delta = 0$; $\delta\epsilon = 0$ relációkkal faktorizálunk. Ha $l(a) = 1$, ..., $l(e) = 5$, akkor:

$$A_A = a \oplus \begin{smallmatrix} & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix}$$

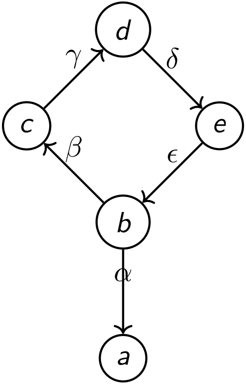
$\Delta(e) = \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix}$; $\Delta(d) = d$; $\Delta(c) = c$;

$\Delta(b) = \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$; $\Delta(a) = a$, nem kváziöröklődő sorrend, (az ötödik idempotens által generált ideál nem projektív).



Δ-k számolása l függvényében

A az ábrán látható gráfhoz tartozó gráfalgebra, amikor az $\gamma\delta = 0$; $\delta\epsilon = 0$ relációkkal faktorizálunk. Ha $l(a) = 1$, ..., $l(e) = 5$, akkor:



$$A_A = a \oplus \begin{smallmatrix} & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix}$$

$\Delta(e) = \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix}$; $\Delta(d) = d$; $\Delta(c) = c$;
$\Delta(b) = \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$; $\Delta(a) = a$, nem kváziöröklődő sorrend, (az ötödik idempotens által generált ideál nem projektív).
$l'(a) = 1$; $l'(b) = 4$; $l'(c) = 5$; $l'(d) = 3$; $l'(e) = 2$:

$$A_A = a \oplus \begin{smallmatrix} & e & \\ & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & b & \\ a & & c \\ & & d \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}$$

$\Delta(c) = \begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}$; $\Delta(b) = \begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}$; $\Delta(d) = \begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix}$; $\Delta(e) = e$;
$\Delta(a) = a$, melyek kváziöröklődő sorrendet adnak.

Becslés a globális dimenzióra

Állítás

Egy Λ *kváziöröklődő algebrára, melynek örökletes ideállánca:*

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_n = \Lambda$$

teljesül, hogy $gl\ dim \Lambda \leq 2n - 2$.

Becslés a globális dimenzióra

Állítás

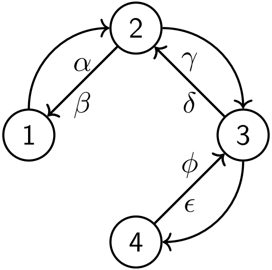
Egy Λ kváziöröklődő algebrára, melynek örökletes ideállánca:

$$0 = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n = \Lambda$$

teljesül, hogy gl dim$\Lambda \leq 2n - 2$.

Éles becslés: az ábrán szereplő B gráfalgebra, ha az $\alpha\gamma = \gamma\epsilon = \delta\beta = \phi\delta = \gamma\delta - \beta\alpha = \epsilon\phi - \delta\gamma = \phi\epsilon = 0$ által generált ideállal faktorizálunk. Ekkor $I(S(i)) = i$ az egyetlen kváziöröklődő sorrend:

$$B_B = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$$



pr dim $S(4) = 6$:

$$0 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \to$$

$$\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to 4 \to 0$$

Iyama tétele

Theorem

(Iyama) *Legyen Λ egy artin algebra, X egy végesen generált Λ-modulus. Ekkor létezik egy Y Λ-modulus, hogy $\Gamma = End(X \oplus Y)$ kváziöröklődő, n hosszú örökletes lánccal. Erre a Γ-ra az is teljesül, hogy gl dim $\Gamma \leq n$.*

Iyama tétele

Theorem

(Iyama) *Legyen Λ egy artin algebra, X egy végesen generált Λ-modulus. Ekkor létezik egy Y Λ-modulus, hogy $\Gamma = End(X \oplus Y)$ kváziöröklődő, n hosszú örökletes lánccal. Erre a Γ-ra az is teljesül, hogy gl dim $\Gamma \leq n$.*

A globális dimenzióra vonatkozó becslést Ringel [2] cikke magyarázza. Ő a standard modulusok egy speciális tulajdonságából vezeti le Iyama eredményét, s az ilyen kváziöröklődő algebrákat erősen kváziöröklődőnek nevezi.

Erősen kváziöröklődő algebrák

Definíció

Legyen Λ egy artin algebra, ebben jelölje $\mathcal{S}$ az egyszerű modulusok izomorfizmusosztályainak halmazát, továbbá $P(M)$ az M modulus projektív fedőjét! Λ jobbról erősen kváziöröklődő (RSQH), ha $\forall\ S \in \mathcal{S}$-re a

$$0 \to R(S) \to P(S) \to \Delta(S) \to 0$$

sorozat egzakt, és létezik egy $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, \ldots n\}$ hozzárendelés, melyre:

1. *$R(S)$ olyan $P(S'')$ projektív modulusok direkt összege, melyekre $l(S'') > l(S)$*
2. *ha S' a $\mathrm{rad}\Delta(S)$ kompozíciófaktora, akkor $l(S') < l(S)$*

Λ balról erősen kváziöröklődő (LSQH), ha $\exists$ olyan $l' : \mathcal{S} \to \{1, 2, \ldots n\}$ hozzárendelés, mely szerint Λ^{op} jobbról erősen kváziöröklődő.
Λ erősen kváziöröklődő (SQH), ha $\exists$ olyan közös $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, \ldots n\}$ hozzárendelés, mely szerint Λ és Λ^{op} is jobbról erősen kváziöröklődő.

Erősen kváziöröklődő algebrák

Definíció

Egy Λ artin algebra kváziöröklődő az $l : \mathcal{S} \to \{1, 2, \ldots n\}$ hozzárendelésre nézve, ha minden $S \in \mathcal{S}$-re létezik egy egzakt sorozat:

$$R(S) \to P(S) \to D(S) \to 0$$

melyre az alábbiak teljesülnek:

1. $R(S)$ *olyan* $P(S'')$ *projektív modulusok direktösszege, melyekre* $l(S'') > l(S)$
2. *ha* S' *a rad* $D(S)$ *kompozíciófaktora, akkor* $l(S') < l(S)$
3. *minden* $S \in \mathcal{S}$*-re* $P(S)$ Δ*-filtrált az* l *hozzárendelés szerint.*

(Figyeljünk, hogy $R(S) \to P(S)$*-nél nincs megkövetelve az injektivitás!)*

Az RSQH ekvivalens definíciója

Állítás

Egy Λ *artin algebra pontosan akkor RSQH algebra az* I *hozzárendeléssel, ha* Λ *kváziöröklődő az* I *hozzárendeléssel, és minden* Δ *projektív dimenziója legfeljebb* 1.

Az RSQH ekvivalens definíciója

Állítás

Egy Λ artin algebra pontosan akkor RSQH algebra az I hozzárendeléssel, ha Λ kváziöröklődő az I hozzárendeléssel, és minden Δ projektív dimenziója legfeljebb 1*.*

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a definícióból következik, hogy egy RSQH algebra egyben kváziöröklődő is ugyanarra az I hozzárendelésre nézve. (Most ugyanis az $R(S) \to P(S)$ leképezés injektivitása miatt atomatikusan teljesül a kváziöröklődőség Ringel-féle definíciójában szereplő 3., fitráltsági feltétel.)

Becslés RSQH algebra globális dimenziójára

Állítás

Legyen Λ *egy* $0 = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n = \Lambda$ *örökletes ideálllánccal rendelkező RSQH algebra. Ekkor* $\mathrm{gl\ dim}\Lambda \leq n$.

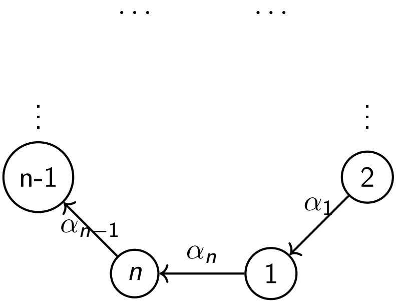
Becslés RSQH algebra globális dimenziójára

Állítás

Legyen Λ egy $0 = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n = \Lambda$ örökletes ideállánccal rendelkező RSQH algebra. Ekkor $\mathrm{gl\ dim}\Lambda \leq n$.

Éles becslés: 1, 2, ... n csúcsokkal rendelkező irányított kör, melynek α_i éle $i+1$-ből i-be mutat (és α_n 1-ből n-be). Γ az ábrán levő gráfhoz tartozó gráfalgebra faktora az $\alpha_i \alpha_{i-1} = 0$ $(1 \leq i < n)$ által generált ideálnál!

$$\Gamma_\Gamma = \begin{smallmatrix} 1 \\ n \\ n-1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix}$$



Becslés RSQH algebra globális dimenziójára

Állítás

Legyen Λ egy $0 = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n = \Lambda$ örökletes ideálllánccal rendelkező RSQH algebra. Ekkor gl dim$\Lambda \leq n$.

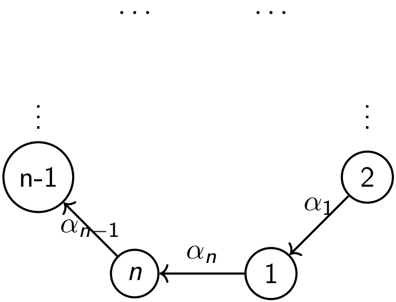
Éles becslés: 1, 2, ... n csúcsokkal rendelkező irányított kör, melynek α_i éle $i+1$-ből i-be mutat (és α_n 1-ből n-be). Γ az ábrán levő gráfhoz tartozó gráfalgebra faktora az $\alpha_i \alpha_{i-1} = 0$ $(1 \leq i < n)$ által generált ideálnál!

$$\Gamma_\Gamma = \begin{smallmatrix} 1 \\ n \\ n-1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix}$$

$I(S(i)) = i$ esetén $j \geq 2$-re $\Delta(j) = P(j)$ $\Rightarrow R(j) = 0$; $j = 1$-re $\Delta(1) = S(1)$;

$$0 \to \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ n \\ n-1 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0$$

egzakt sor. I egy kváziöröklődő sorrend, így Γ RSQH. Ugyanakkor *pr dim* $S(i) = i$, így *gl dim* $\Gamma = n$.



Jobb- baloldali szimmetria hiánya I.

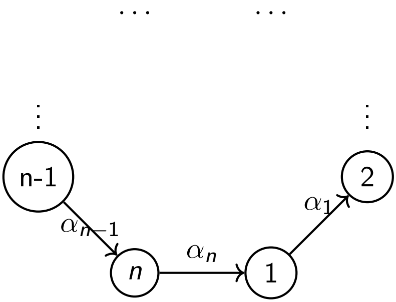
Az előző példa olyan algebra, mely az adott sorrendre RSQH, de nem LSQH. Γ^{op}-ban az irányítatlan gráfstruktúra marad, a nyilakat ellenkezőleg irányítjuk, a faktorizáló relációk megfordulnak.

$$\Gamma^{op}_{\Gamma^{op}} = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{smallmatrix}n-2\\n-1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}n-1\\n\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}n\\1\end{smallmatrix}$$

$l(S(i)) = i$ esetben

$\Delta(n) = P(n)$, $j < n$-re $\Delta(j) = S(j)$.

De $j < n$-re $pr\ dim\ S(j) = n - j$, így nem létezik az LSQH-hoz szükséges egzakt sor.

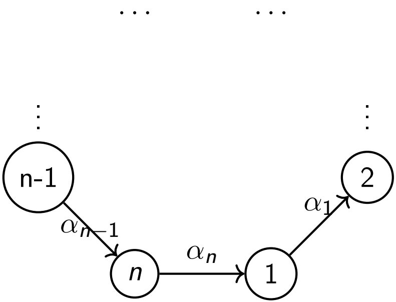


Jobb- baloldali szimmetria hiánya I.

Az előző példa olyan algebra, mely az adott sorrendre RSQH, de nem LSQH. Γ^{op}-ban az irányítatlan gráfstruktúra marad, a nyilakat ellenkezőleg irányítjuk, a faktorizáló relációk megfordulnak.

$$\Gamma^{op}_{\Gamma^{op}} = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \ldots \oplus \begin{smallmatrix}n-2\\n-1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}n-1\\n\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}n\\1\end{smallmatrix}$$

$l(S(i)) = i$ esetben
$\Delta(n) = P(n)$, $j < n$-re $\Delta(j) = S(j)$.
De $j < n$-re $pr\ dim\ S(j) = n - j$, így nem létezik az LSQH-hoz szükséges egzakt sor.



Példa

Λ egy olyan Nakayama algebra, melynek gráfja n hosszú lánc, ($i \to i-1$ nyilakkal) és van benne legalább egy reláció. Ekkor Λ RSQH az $l(S(i)) = i$ sorrendre, hiszen $\Delta(i) = P(i)$. Azonban nem LSQH erre a sorrendre, hiszen $\Delta(i) = S(i)$, és a reláció miatt lesz olyan j, melyre $pr\ dim\ S(i) > 1$.

Jobb- baloldali szimmetria hiánya II.

Van olyan algebra, mely egy adott sorrendre RSQH, de semelyikre sem LSQH.

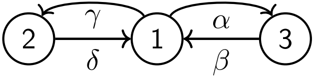


Figure 1: D gráfja

D az ábrán látható gráf faktora, ahol az ideált generáló relációk: $\delta\gamma = \delta\alpha = \beta\alpha = \beta\gamma\delta = 0$.

$D_D = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$

Az $I(S(i)) = i$-re $\Delta(2) = P(2)$; $\Delta(3) = P(3)$; $R(1) = P(2) \oplus P(3)$ projektív, így erre a sorrendre D RSQH (hisz I kváziöröklődő sorrend).

Jobb- baloldali szimmetria hiánya II.

Van olyan algebra, mely egy adott sorrendre RSQH, de semelyikre sem LSQH.

D az ábrán látható gráf faktora, ahol az ideált generáló relációk: $\delta\gamma = \delta\alpha = \beta\alpha = \beta\gamma\delta = 0$.

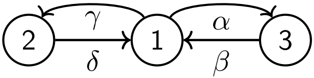


Figure 1: D gráfja

$D_D = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$

Az $I(S(i)) = i$-re $\Delta(2) = P(2)$; $\Delta(3) = P(3)$; $R(1) = P(2) \oplus P(3)$ projektív, így erre a sorrendre D RSQH (hisz I kváziöröklődő sorrend).

$D^{op}_{D^{op}} = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$

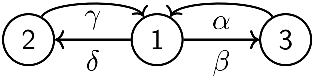


Figure 2: D^{op} gráfja

D^{op}-nak csak $I(S(i)) = i$ kváziöröklődő sorrendje. Ha D^{op} erre nem LSQH, akkor D semmilyen sorrendben sem RSQH. Azonban $\Delta(1) = S(1)$ projektív dimenziója $2 > 1$:

$$0 \to \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix} \to 1 \to 0$$

SQH algebrák globális dimenziója

Állítás

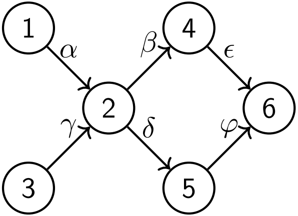
Ha Λ *SQH algebra, akkor* $\text{gl dim}\,\Lambda \leq 2$. *A megfordítás csak részben igaz: ha* $\text{gl dim}\,\Lambda \leq 2$, *akkor* Λ *RSQH, LSQH, de nem feltétlenül SQH.*

SQH algebrák globális dimenziója

Állítás

Ha Λ SQH algebra, akkor gl dim $\Lambda \leq 2$. A megfordítás csak részben igaz: ha gl dim $\Lambda \leq 2$, akkor Λ RSQH, LSQH, de nem feltétlenül SQH.

Példa: *gl dim G* ≤ 2, de G nem SQH.

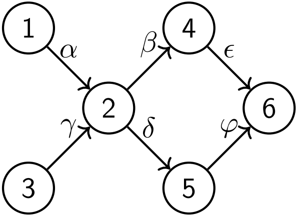


SQH algebrák globális dimenziója

Állítás

Ha Λ SQH algebra, akkor gl dim $\Lambda \leq 2$. A megfordítás csak részben igaz: ha gl dim $\Lambda \leq 2$, akkor Λ RSQH, LSQH, de nem feltétlenül SQH.

Példa: *gl dim* $G \leq 2$, de G nem SQH.
G az ábrán levő gráf faktora, ha az ideált generáló relációk: $\alpha\beta = \gamma\delta = \beta\epsilon - \delta\varphi = 0$.



$$G_G = \begin{smallmatrix}1\\2\\5\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\4&&5\\&6&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix} \oplus 6$$

$$0 \to \begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\4&&5\\&6&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\5\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$$

$$0 \to 6 \to \begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\4&&5\\&6&\end{smallmatrix} \to 2 \to 0$$

$$0 \to \begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\4&&5\\&6&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\2\\4\end{smallmatrix} \to 3 \to 0$$

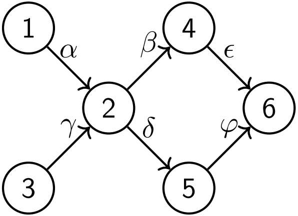
pr dim $S(1) =$ *pr dim* $S(2) =$ *pr dim* $S(3) = 2$; *pr dim* $S(6) = 0$;
pr dim $S(4) =$ *pr dim* $S(5) = 1$, vagyis *gl dim* $G_G = 2$.

SQH algebrák globális dimenziója

Állítás

Ha Λ SQH algebra, akkor gl dim $\Lambda \leq 2$. A megfordítás csak részben igaz: ha gl dim $\Lambda \leq 2$, akkor Λ RSQH, LSQH, de nem feltétlenül SQH.

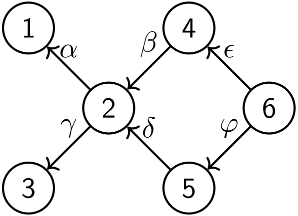
Példa: *gl dim* $G \leq 2$, de G nem SQH.
G RSQH az $I(S(6)) = 6$; $I(S(3)) = 5$; $I(S(1)) = 4$; $I(S(2)) = 3$; $I(S(5)) = 2$; $I(S(4)) = 1$ sorrendre: I kváziöröklődő sorrend, $\Delta(6)$, $\Delta(3)$ és $\Delta(1)$ projektív dimenziója 0, míg $\Delta(2)$, $\Delta(5)$ és $\Delta(4)$ esetében ez 1:



$$G_G = \begin{smallmatrix}4\\6\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}5\\6\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 4 & & 5 \\ & 6 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\5\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\4\end{smallmatrix} \oplus 6$$

folytatás

'-vel különböztetjük meg a G^{op}-hoz tartozó egyszerűeket és deltákat a G-beliektől.



$$G^{op}_{G^{op}} = 1 \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 6 & \\ 4 & & 5 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$$

$$0 \to 1 \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \to 4 \to 0$$

$$0 \to 3 \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 5 \to 0$$

$$0 \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 6 & \\ 4 & & 5 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \to 6 \to 0$$

$pr\ dim\ S'(1) = pr\ dim\ S'(3) = 0$; $pr\ dim\ S'(2) = 1$ és $pr\ dim\ S'(4) = pr\ dim\ S'(5) = pr\ dim\ S'(6) = 2$, így $gl\ dim\ G^{op} = 2$.

G^{op} RSQH az $l'(S(i)) = i$ sorrendre ($pr\ dim\ \Delta'(2) = 1$, a többire meg 0):

$$G^{op}_{G^{op}} = 1 \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 6 & \\ 4 & & 5 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$$

Ha lenne l_0 rendezés, melyre G és G^{op} egyszerre RSQH, akkor azon i-re melyre $l_0(i)$ a lehető legkisebb: $\Delta_0(i) = \Delta'_0(i) = S(i) = S'(i)$. Azonban $\forall$ i-re $pr\ dim\ S(i) = 2$, vagy $pr\ dim\ S'(i) = 2$, és ez ellentmondás.

Hivatkozások

- VLASTIMIL DLAB - CLAUS MICHAEL RINGEL, *Quasi-hereditary algebras*, Illinois Journal of Mathematics Volume 33, Number 2, Pages 280-291, Summer 1989
- CLAUS MICHAEL RINGEL, *Iyama's finiteness theorem via strongly quasi-hereditary algebras*, J. Pure Appl. Algebra, 214, no. 9, Pages 1687–1692, 2010
- OSAMU IYAMA, *Finiteness of representation dimension*, Proceedings of the American Mathematical Society Volume 131. Number 4, Pages 1011-1014, 2003
- MAYU TSUKAMOTO, *Strongly quasi-hereditary algebras and rejective subcategories*, Nagoya Mathematical Journal, Volume 237, Pages 10-38, March 2020