Meghatározza-e a Bernardi-hatás a szalaggráf génuszát?

Michaletzky Tamás (PMBLWY)

Témavezető: Tóthmérész Lilla

Chip-firing és az $S(G)$ sandpile csoport

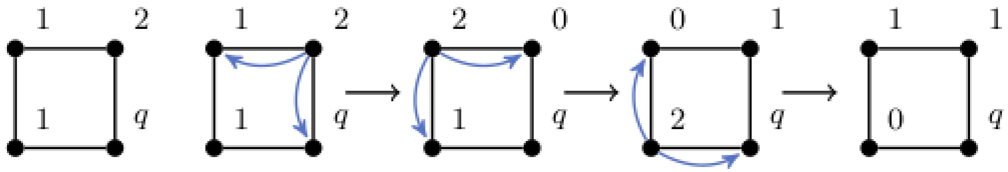
Adott $G = (V, E)$ irányítatlan, öf gráf

Chip konfiguráció:

$$Div(G) = \{x \in \mathbb{Z}^{V(G)} : x = (x_1, \dots, x_n)\}$$

Tüzelés: v csúcs tüzel, szomszédainak egy-egy chipet átad:

$$y = x - L(G) \cdot \chi_v$$



Ekvivalencia: $\sim$ $Div(G)$-n:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in im(L)$$

Sandpile csoport

$$Div^0(G) = \left\{ x \in Div(G) : \sum_{v \in V(G)} x_v = 0 \right\} \Rightarrow S(G) = {}^{Div^0(G)} /_{im(L)}$$

Feszítőfák és Bernardi-torzor

Tétel: $|\tau(G)| = |S(G)|$

Természetes, gráf izomorfizmusaira invariáns bijeckió nincs.

Tétel: Ha (G, ρ) szalag-gráf (*ribbon graph*), akkor létezik $\tau(G)$-n $S(G)$-torzor struktúra.

Torzor

Def: A H halmaz egy G-torzor, ha G-nek létezik szabad, tranzitív hatása H-n, mely egy

$$\alpha : G \times H \to H$$

leképezés, hogy

$$\forall x, y \in H : \exists! g \in G : gx \mapsto y$$

Állítás: Ha H egy G-torzor $\Rightarrow |H| = |G|$.

Szalaggráfok és génuszuk

(G,ρ) szalaggráf, ha $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ és
$\forall v \in V(G) : \rho_v \in S_{\deg(v)}$: a v-ből kimenő élek egy ciklikus permutációja.

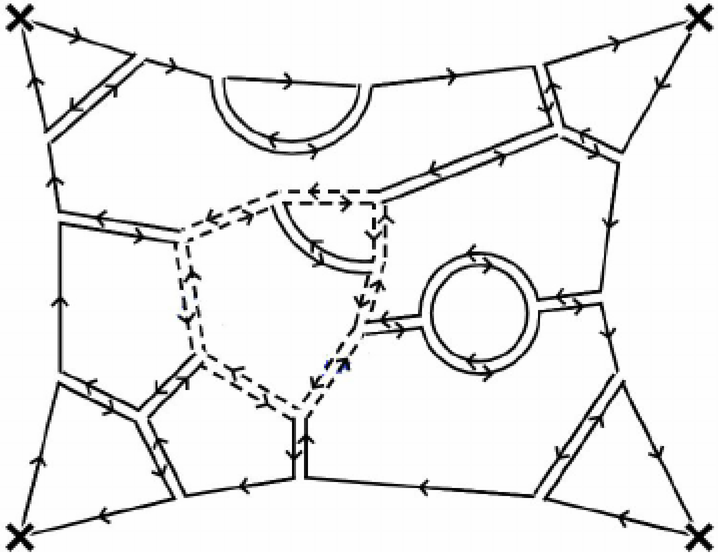
Kombinatorikus beágyazás:

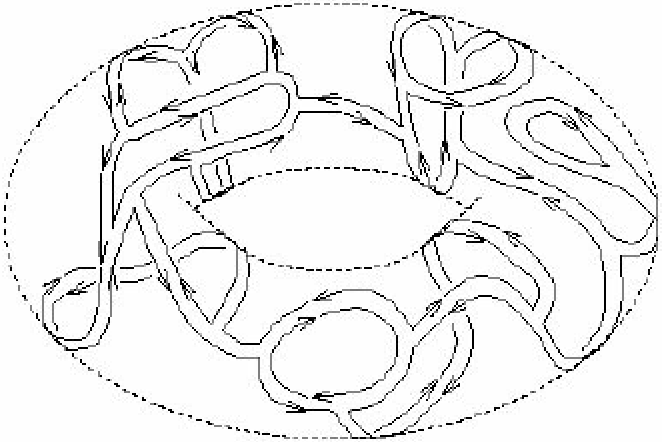
$$G \to Surface_G : \forall c \in cyc(G,\rho) \to \text{ egy lapja a felületnek}$$

Tétel: (G,ρ) génusza:

$$g_s(G) = 2 - v(G) + e(G) - cyc(G,\rho).$$

Megjegyzés: nem egyezik meg a kombinatorikai génusszal: $g(G) = e(G) - v(G) + 1$





Break-divizor és Bernardi-bijekció

Legyen T feszítőfa: $g(G) = e(G) - v(G) + 1$ nem-fa él G-ben

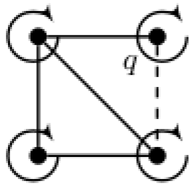
Tétel: Létezik

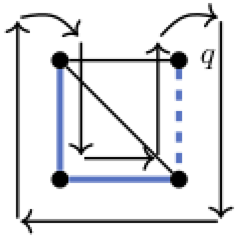
$$v \in V(G), v \in e \in E(G) : \Phi_{v,e} : S^g(G) \leftrightarrow \tau(G).$$

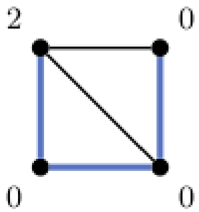
Definíció: $b \in Div^g(G)$ break-divizora T feszítőfának, ha $vw \notin E(G) : chip_{vw} \in \{b_v, b_w\}$.

Tétel: $S^g(G)$ reprezentálódik a break-divizorokon:

$$\forall x \in Div^g(G) : \exists! b \in Break(G) : x \sim b.$$







Bernardi-hatás

Legyen T feszítőfa, v csúcs, $x \in S(G)$

Ígéret: $S(G)$ invariáns hatása $\tau(G)$. Kell egy alappont v.

$$\beta_v : S(G) \times \tau(G) \to \tau(G)$$

$$(x, T) \mapsto T'$$

Hogyan: $S(G)$ természetes módon hat $S^g(G)$-n:

$$T \xrightarrow{\Phi_{v,e}} b \xrightarrow{S(G)} x + b \xrightarrow{\Phi_{v,e}^{-1}} T'$$

Szalaggráfok topológiája

(G, ρ)-n a szalagstruktúra

- topológia: $g_s(G)$ génusz
- $S(G)$-torzor $\tau(G)$-n

Tétel: Ha $g_s(G) = 0$, akkor

- $\exists!$ Bernardi-torzor: β_v független v-től
- A rotor-hatás és Bernardi-torzor megegyezik, ahol $r_v : S(G) \times \tau(G) \to \tau(G)$.

Tétel (McDonough, 2020): A rotor-hatás meghatározza a szalaggráfok génuszát:

$$(G, \rho) : \forall v : \beta_v : S(G) \times \tau(G) \to \tau(G) \Rightarrow g_s(G)$$

Feladat: Igaz-e ez a Bernardi-hatásra is?

Állítás: Legyen (G, ρ) 3-összefüggő szalaggráf és tegyük fel, hogy adottak a

$$\beta_v : S(G) \times \tau(G) \to \tau(G)$$

hatások midnen $v \in V(G)$. Ekkor, még ha a szalag struktúra nem ismert, meghatározhatjuk a gráf topológiai génuszát $g_s(G) = 2 - v(G) + e(G) - cyc(G, \rho)$.

Eredmény

- $e_1, e_3 \in T; e_2 \notin T; e_w \in T;$
- w_3 is not in any paths in T, going from w_1 to a lower neighbor,;
- w_1 is not in the path in T, going from w_3 to upper neighbor w'.

4-öf gráfra

Áll: $\rho_v = (e_1, e_2, e_3) \Leftrightarrow \beta_v(x)(T) = T'$.

3-öf gráfra

Áll: $S_U, S_L \subset Div^0(G) : \forall x \in S_U, y \in S_L : x \nsim y$. Ekkor

1. $\rho_v = (e_1, e_2, e_3) \Rightarrow \exists x \in S_U : \beta_v(x)(T) = T'$
2. $\rho_v = (e_1, e_2, e_3) \Rightarrow \exists y \in S_L : \beta_v(y)(T) = T'$

Sejtés: 2-öf gráfra hasonló igaz

Kérdés: (G, ρ) tetszőleges öf

Köszönöm a figyelmet!