Operátoralgebrák izomorfizmusai

Göde Ábel

.

Témavezető: Tarcsay Zsigmond

Pozitív operátorok, részbenrendezés

Hilbert-téren pozitívnak nevezünk egy A operátort, ha

$$(Ax|x) \geq 0 \qquad \forall x \in H$$

Ez megadja operátoralgebrák egy részbenrendezését, ahol

$$A \leq B \Leftrightarrow ((B-A)x|x) \geq 0 \quad \forall x \in H$$

A cél azon leképezések jellemzése, mely önadjungált operátorok részbenrendezését megtartja.
Ebben a témában Peter Šemrl és Roman Drnovšek cikkeit dolgoztam fel.

Önadjungált operátorok rendezés automorfizmusai

Jelölje $B_s(H)$ a (legalább 2-dimenziós) Hilbert-tér önadjungált operátorainak halmazát. A következőt állíthatjuk a rendezést megőrző leképezéseiről.

Tétel

Legyen H legalább 2-dimenziós Hilbert-tér, $\phi : B_s(H) \to B_s(H)$ bijekció, melyre

$$A \leq B \Leftrightarrow \phi(A) \leq \phi(B), \qquad A, B \in B_s(H).$$

Ekkor létezik $C \in B_s(H)$ és egy $T : H \to H$ invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátor, melyekkel

$$\phi(A) = TAT^* + C, \qquad A \in B_s(H).$$

Összehasonlíthatóságot megőrző leképezések

Azt mondjuk, hogy az A és B operátor összehasonlíthatók, $A \sim B$, ha $A \leq B$ vagy $A \geq B$.

Tétel

Legyen H legalább 2-dimenziós Hilbert-tér, $\phi : B_s(H) \to B_s(H)$ bijekció, melyre

$$A \sim B \Leftrightarrow \phi(A) \sim \phi(B), \qquad A, B \in B_s(H).$$

Ekkor létezik $c \in \{-1, 1\}$, $C \in B_s(H)$ és egy $T : H \to H$ invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátor, melyekkel

$$\phi(A) = cTAT^* + C, \qquad A \in B_s(H).$$

Speciálisan, minden összehasonlíthatóságot megőrző bijekció rendezés automorfizmus vagy rendezés anti-automorfizmus.

Hermitikus mátrixok geometriája

Jelölje H_n az $n \times n$-es hermitikus mátrixok terét, ezen

$$d(T,S) := rank(T-S), \qquad T,S \in H_n$$

metrikát definiál. Azt mondjuk, hogy A és B szomszédos elemek, ha $d(A,B) = 1$.

Tétel

Legyen $n \geq 2$ egész, és $\phi : H_n \to H_n$ olyan bijekció, melyre $A, B \in H_n$ mátrixok pontosan akkor szomszédosak, ha $\phi(A)$ és $\phi(B)$ szomszédosak. Ekkor létezik $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, T invertálható $n \times n$-es komplex mátrix és $S \in H_n$, melyekkel

$$\phi(A) = cTAT^* + S, \qquad A \in H_n,$$

vagy

$$\phi(A) = cT\bar{A}T^* + S, \qquad A \in H_n.$$

Effekt algebra

A H Hilbert-tér effekt algebrája a

$$[0, I] = \{C \in B_s(H) | 0 \leq C \leq I\}$$

operátor intervallum.
Tekintsük a $p < 1$ paraméterű

$$f_p(x) := \frac{x}{px + 1 - p}$$

függvényt. $p \in [0, 1)$ esetén legyen $dom(f_p) := [0, \infty)$, míg $p < 0$ esetén legyen $dom(f_p) := \left[0, 1 - \frac{1}{p}\right)$.

Effekt algebra rendezés automorfizmusai

Tétel

Tegyük fel, hogy $\phi : [0, I] \to [0, I]$ *rendezés automorfizmus. Ekkor létezik* $p < 0$ *és* $T : H \to H$ *invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátor, melyre*

$$\phi(A) = \phi_{p,T}(A) = f_p((I+(TT^*)^{-1})^{\frac{1}{2}}(I-(I+TAT^*)^{-1})(I+(TT^*)^{-1})^{\frac{1}{2}}).$$

Tétel

Tegyük fel, hogy $\phi : [0, I] \to [0, I]$ *rendezés automorfizmus. Ekkor létezik* $p < 0$, $r \in (0, 1)$ *és* $T : H \to H$ *invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátor, melyre* $\|T\| \leq 1$, *és*

$$\phi(A) = f_p((f_r(TT^*)^{\frac{1}{2}} f_r(TAT^*)(f_r(TT^*)^{\frac{1}{2}}).$$

Csoportelméleti jellemzés

Jelölje $CGL(H)$ a H Hilbert-tér invertálható, korlátos, lineáris vagy konjugáltan lineáris operátorainak csoportját. Ebbe természetesen beágyazható a komplex egységkör S^1 multiplikatív csoportja a $z \mapsto zI$ leképezéssel.
Ekkor az effekt algebra rendezés automorfizmusainak csoportja izomorf a

$$G_1 := CGL(H)/S^1$$

faktorcsoporttal.