Véletlen gráfok és gráflimeszek

Ferenczi Dávid
Témavezető: Backhausz Ágnes

2021. május 13.

1. Bevezetés

A félévben az volt a célom, hogy véletlen gráfok vizsgálatához szükséges ismereteimet bővítsem, és megismerkedjek a véletlen gráfok határértékének fogalmával. Ezen belül a sűrű gráfok limeszéhez [1] volt segítségemre, míg a Benjamini–Schramm-konvergenciához [2]-t használtam. A félév során [2]-ből számos feladatot megoldottam, amik közül néhány megoldást a megfelelő fejezetek példa alfejezetében mutatok be.
A beszámolóban csupán a lokális konvergencia bemutatására szorítkoztam, hogy a beszámoló formai követelményeinek eleget téve tudjam összefoglalni a legfontosabb fogalmakat.

2. Lokális konvergencia

Ebben a fejezetben a lokális konvergencia felépítésének egy lehetséges módját fogom összefoglalni. Ehhez [2]-t, és [3]-t használtam. Ezt a konvergenciát szokás még Benjamini–Schramm-konvergenciának is nevezni.
Ebben az esetben a konvergenciának intuitívan az a jelentése, hogy egy véletlen gráf egy "átlagos pontból" nézve egy idő után lokálisan ugyanúgy fog kinézni. Ehhez gyökeres gráfokra lesz szükségünk.

2.1. Definíció. A (G, o) pár egy gyökeres gráf, ha G egy gráf, és o egy tetszőleges csúcs. Egy gráf lokálisan véges, ha minden csúcs foka véges.

2.2. Definíció. A (G, o) gyökeres gráf esetén $B_r^G(o) = (V(B_r^G(o)), E(B_r^G(o), o))$, ahol

$$V(B_r^G(o)) = \{u \in V(G) : d_G(0, u) \leq r\}$$
$$E(B_r^G(o)) = \{\{u, v\} \in E(G) : d_G(o, u) \leq r, d_G(o, v) \leq r\}$$

A gráfizomorfizmusok a megszokottak szerint működnek itt is, azonban az a plusz megkötés fennáll, hogy a gyökeret gyökérbe kell, hogy vigye a leképezés.

2.3. Definíció. Legyen (G_1, o_1), (G_2, o_2) 2 összefüggő, gyökeres részgráf. Legyen

$$R^\star = \sup_r \{B_r^{G_1}(o_1) \cong B_r^{G_2}(o_2)\}.$$

Ennek segítségével legyen

$$d_{\mathcal{G}_\star}((G_1, o_1), (G_2, o_2)) = \frac{1}{R^\star + 1}.$$

Az $R^\star$ a legnagyobb olyan érték, amire a 2 gráf lokálisan izomorf. Ha $R^\star = \infty$, akkor a 2 gráf izomorf. A $\mathcal{G}_\star$ a gyökeres gráfok $d_{\mathcal{G}_\star}$ metrikával ellátott metrikus tere.

Ez természetesen kiterjeszthető nem összefüggő gráfokra is, ha csupán a gyökérrel egy komponensben található csúcsokat vesszük figyelembe.

2.1. Determinisztikus gráfok gyenge konvergenciája

Ebben a részben defininálni fogjuk determinisztikus gráfokra a gyenge konvergenciát.

2.4. Definíció. Legyen $G_n = (V(G_n), E(G_n))$ egy véges gráfsorozat. Legyen továbbá (G_n, o_n) az a gyökeres részgráf, amit úgy kapunk G_n-ből, hogy egyenletes eloszlás szerint kiválasztjuk G_n egy tetszőleges csúcsát, majd G_n-et megszorítjuk az o_n-ből elérhető csúcsok halmazára.
Azt mondjuk, hogy (G_n, o_n) tart (G, o)-hoz lokálisan gyengén, ahol (G, o) a $\mathcal{G}_\star$ egy (elképzelhető, hogy véletlen) μ eloszlású eleme, ha minden $h : \mathcal{G}_\star \to \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény esetén

$$\mathbb{E}(h(G_n, o_n)) \to \mathbb{E}_\mu(h(G, o))$$

teljesül. Ezt a konvergenciát $(G_n, o_n) \xrightarrow{d} (G, o)$-val jelöljük.

Ennek a definicónak a szemléletes jelentése az, hogy ha a (G_n, o_n) gráf lokálisan egyre inkább úgy néz ki mint a (G, o) gráf, akkor azt mondjuk, hogy az utóbbi lesz az előbbi határértéke.
Erre egy példa lehetne, ha a h függvény annak az indikátora, hogy a gyökérnek pontosan k szomszédja van. Ez esetben a k fokú csúcsok aránya konvergens lesz.

2.5. Megjegyzés. A definícióban a bal oldali várható érték az egyenletes eloszlás szerint választott o_n csúcsra vonatkozik, míg a jobb oldali a (G, o) gráf μ eloszlása szerinti.

2.6. Megjegyzés. A definícióban a bal oldali várható értéket fel is tudjuk írni az alábbi módon:

$$\mathbb{E}(h(G_n, o_n)) = \frac{1}{|V(G_n)|} \sum_{u \in V(G_n)} h(G_n, u).$$

Most kimondunk egy tételt, ami ekvivalens a gyenge konvergencia definíciójával, azonban a gyakorlatban könnyebben ellenőrizhető lesz. A tétel szerint nem kell minden h függvényre belátni a konvergenciát, elég, ha a G_n gráf tapasztalati eloszlása konvergál a határérték gráf eloszláshoz.

2.7. Tétel ([2] 2.6)**.** *Legyen (G_n, o_n) véges, gyökeres gráfok egy sorozata. Ekkor $(G_n, o_n) \xrightarrow{d} (G, o)$ pontosan akkor, ha minden $H_\star \in \mathcal{G}_\star$ és minden $r \geq 0$ esetén*

$$p^{G_n}(H_\star) \to \mu(B_r^G(o) \simeq H_\star), \tag{1}$$

ahol

$$p^{G_n}(H_\star) = \frac{1}{V(G_n)} \sum_{u \in V(G_n)} \mathbb{1}_{\{B_r^{G_n}(u) \simeq H_\star\}}$$

Ez a tétel már a gyakorlatban lehetővé teszi számunkra, hogy ne csak a definíció ellenőrzésével legyen módunk gráfok gyenge határértékét kiszámolni, de ezt még könnyebbé tudjuk tenni.
A következő tétel értelmében, ha találunk egy olyan $\mathcal{I}_\star \subset \mathcal{G}_\star$ halmazt, amire $\mu((G, o) \in \mathcal{I}_\star) = 1$, elég a tapasztalati eloszlások konvergenciáit $H_\star \in \mathcal{I}_\star$ elemekre ellenőrizni.

2.8. Tétel. *Legyen G_n gyökeres gráfok egy sorozata, és $o_n \in V(G_n)$ egyenletes eloszlással választva, valamint legyen $(G,o) \in \mathcal{G}_\star$ egy μ eloszlású véletlen elem, és $\mathcal{I}_\star \subset \mathcal{G}_\star$, legyen továbbá $\mathcal{I}_\star(r) = \{B_r(G,o) | (G,o) \in \mathcal{I}\}$.*
Tegyük fel, hogy $\mu((G,o) \in \mathcal{I}_\star) = 1$. Ekkor, ha (1) teljesül minden $r \geq 0$ és $H_\star \in \mathcal{I}_\star(r)$ esetén, $(G_n,o_n) \xrightarrow{d} (G,o)$.

2.2. Példák

Ebben a fejezetben néhány példát mutatok, amik a [2]-ban olvasható feladatok általam konstruált megoldásai. Ezek egyrészt érdekes tulajdonságaira világítanak rá a gyenge limesznek, másrészt az itt látott technikák a korábbi tételek közvetlen alkalmazásai.

2.9. Állítás (Véletlen lokális határérték)**.** Egy G_n determinisztikus sorozat határértéke lehet egy G véletlen gráf.

Bizonyítás Legyen G_n az a gráf, ami n darab K_3-ből és $3n$ izolált pontból áll. Ekkor ez egy determinisztikus gráfsorozat, azonban

$$\mathbb{E}(h(G_n,o_n)) = \frac{1}{6n} \sum_{u \in V(G_n)} h(G_n,u) = \frac{1}{2} h(K_3,o) + \frac{1}{2} h(K_1,o),$$

ami egy olyan véletlen gráf, ami $\frac{1}{2}$ valószínűséggel egy izolált csúcs, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig egy háromszög. □

2.10. Tétel (Az út és kör gyenge limeszei)**.** *Legyen $V(G_n^1) = [n]$, és $E(G_n^1) = \{\{i; i+1\}, i \in [n-1]\}$, valamint $V(G_n^2) = [n]$, és $E(G_n^2) = \{\{i; i+1\}, i \in [n-1]\} \cup \{\{1; n\}\}$ Ekkor mindkét gráf lokális határértéke $(\mathbb{Z}, 0)$ lesz.*

Bizonyítás Azt könnyű látni, hogy ha $\mathcal{I}_\star = \{(\mathbb{Z}, 0)\}$, akkor minden $r \geq 1$ esetén $\mathcal{I}_\star(r)$-ben egy $2r$ hosszú út van. Továbbá az is látszik, hogy $\mu(B_r^{\mathbb{Z}}(o) \simeq P_{2r}) = 1$, vagyis 2.7 és 2.8 miatt elég megmutatni, hogy

$$\mathbb{P}(B_r^{G_n^k}(u) \simeq H_\star) \to 1, k = 1,2$$

teljesül.
De ez teljesül, hisz ha $n > 2r$, akkor $\mathbb{P}(B_r^{G_n^1}(o) \simeq P_{2r}) = \dfrac{n-2r}{n}$.
G_n^2-re ugyanez elmondható, és $\mathbb{P}(B_r^{B_n^2}(o) \simeq P_{2r}) = \mathbb{1}_{n>2r}$. Azaz leellenőriztük a tapasztalati eloszlások konvergenciáját. □

2.3. Véletlen gráfok lokális gyenge konvergenciája

A determinisztikus gráfokra felírt definíció véletlen gráfokra történő általánosításában az a probléma áll fent, hogy amíg a (G_n, o_n) determinisztikus a $\mathbb{E}(h(G_n,o_n))$ mennyiségben egyedül a gyökér kiválasztása véletlen, addig egy véletlen gráf esetén "dupla" várható értéket kell venni.
Emellett akárcsak valószínűségi változók konvergenciájánál, itt is többféle lehetséges konvergenciafogalom lehet. Ezeket fogjuk most definiálni.

2.11. Definíció (Véletlen gráfok lokális gyenge konvergenciája)**.** Legyen $G_n = (V(G_n), E(G_n))$ egy véges (nem feltétlenül összefüggő) véletlen gráf. Ekkor

1. azt mondjuk, hogy G_n lokálisan gyengén tart a $\overline{\mu}$ eloszlású $(\overline{G}, \overline{o})$-hoz, ha minden $h : \mathcal{G}_\star \to \mathbb{R}$ folytonos, korlátos függvény esetén
$$\mathbb{E}(h(G_n, o_n)) \to \mathbb{E}_\mu(h(\overline{G}, \overline{o}))$$
teljesül, ahol a bal oldali várható érték az o_n választása, valamint a G_n eloszlása szerinti. Ezt a determinisztikus esettel analóg módon $(G_n, o_n) \xrightarrow{d} (G, o)$-val jelöljük.

2. Azt mondjuk, hogy G_n lokálisan sztochasztikusan konvergál a μ eloszlású (G, o)-hoz, ha
$$\mathbb{E}(h(G_n, o_n)|G_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}_\mu(h(G, o)),$$
minden $h : \mathcal{G}_\star \to \mathbb{R}$ folytonos korlátos függvényre. Ezt $G_n \xrightarrow{\mathbb{P}-loc} G$-kal jelöljük.

3. Azt mondjuk, hogy G_n lokálisan 1 valószínűséggel konvergál a μ eloszlású (G, o)-hoz, ha
$$\mathbb{E}(h(G_n, o_n)|G_n) \xrightarrow{1} \mathbb{E}_\mu(h(G, o)),$$
minden $h : \mathcal{G}_\star \to \mathbb{R}$ folytonos korlátos függvényre. Ezt $G_n \xrightarrow{1-loc} G$-kal jelöljük.

Fontos itt megjegyezni, hogy a sztochasztikus lokális és az 1 valószínűségű lokális konvergenciánál már G_n mérhető valószínűségi változók lesznek, és azokon már lehet az elemi valószínűségi konvergenciákat használni.
Fontos megjegyezni, hogy az $\mathbb{E}(h(G_n, o_n)|G_n)$ a G_n gráfok egy determinisztikus függvénye.
A következő tétel ezen konvergenciatípusok kapcsolatáról mond valamit.

2.12. Tétel ([2] 2.12)**.** *Tegyük fel, hogy $(G_n, o_n) \xrightarrow{d} (\overline{G}, \overline{o})$, ahol (G, o) eloszlása $\overline{\mu}$, valamint (G_n) konvergál lokálisan sztochasztikusan a μ eloszlású (G, o)-hoz. Ekkor $\overline{\mu} = \mathbb{E}(\mu())$.*

A következő tétel a determinisztikus esetben látott konvergenciakritériumhoz hasonló kritériumokat ad meg a véletlen gráfok konvergenciájára. A következő két tétel a determinisztikus gráfok határértékének kiszámítását lehetővé tevő 2.7 és 2.8 tételek véletlen gráfokról szóló változata.

2.13. Tétel ([2] 2.13)**.** *Legyen G_n gyökeres gráfok egy sorozata. Ekkor,*

1. $(G_n, o_n) \xrightarrow{d} (\overline{G}, \overline{o})$, ha minden $H_\star \in \mathcal{G}_\star$ és minden $r \geq 0$ esetén
$$\mathbb{E}(p^{G_n}(H_\star)) = \frac{1}{|V(G_n)|} \sum_{u \in V(G_n)} \mathbb{P}(B_r^{G_n}(v) \simeq H_\star) \to \overline{\mu}(B_r^G(\overline{o}) \simeq H_\star). \tag{2}$$

2. G_n konvergál lokálisan sztochasztikusan (G, o)-hoz, ha minden $H_\star \in \mathcal{G}_\star$ és minden $r \geq 0$ esetén
$$p^{G_n}(H_\star) = \frac{1}{|V(G_n)|} \sum_{u \in V(G_n)} \mathbb{1}_{\{B_r^{G_n}(v) \simeq H_\star\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu(B_r^G(\overline{o}) \simeq H_\star).$$

3. G_n konvergál lokálisan 1 valószínűséggel (G, o)-hoz, ha minden $H_\star \in \mathcal{G}_\star$ és minden $r \geq 0$ esetén
$$p^{G_n}(H_\star) = \frac{1}{|V(G_n)|} \sum_{u \in V(G_n)} \mathbb{1}_{\{B_r^{G_n}(v) \simeq H_\star\}} \xrightarrow{1} \mu(B_r^G(\overline{o}) \simeq H_\star).$$

2.14. Tétel ([2] 2.15)**.** *Legyen (G_n) gyökeres gráfok egy sorozata, valamint $(\overline{G}, \overline{o})$ egy μ eloszlású véletlen elem $\mathcal{G}_\star$-ban, valamint $\mathcal{I}_\star \subset \mathcal{G}_\star$, úgy, hogy $\mu((\overline{G}, \overline{o}) \in \mathcal{I}_\star) = 1$. Ekkor ha (2) fennáll minden $H_\star \in \mathcal{I}_\star(r)$ és $r \geq 1$ esetén, akkor $(G_n, o_n) \xrightarrow{d} (G, o)$.*
Ugyanez igaz lokálisan sztochasztikus, és 1 valószínűségű konvergenciára is.

2.4. Példa

2.4.1. Konfigurációs modell

Legyen G_n egy n csúcsú gráf, valamint $d = (d_i)_{i\in[n]}$ egy fokszámsorozat. Szeretnénk egy olyan gráfot konstruálni, aminek n csúcsa van és fokszámai a d vektornak megfelelőek. Ekkor ha $\sum_i d_i$ páratlan, akkor ilyen gráf biztosan nem létezik. Ha $\sum_i d_i$ páros, akkor meg lehet adni egy ilyen (nem feltétlenül egyszerű) gráfot.
Egy ilyen gráfot megkaphatunk az alábbi módon:

1. Minden csúcsnak adjunk a fokszámának megfelelő félélet.
2. egyenletes eloszlással válasszunk ki két félélet, amiket összekötünk. Ezek így egy élet alkotan a gráfban, és a hozzájuk tartozó féléleket elhagyjuk.
3. Ezt iteráljuk, amíg van félél.

Ezt a véletlen gráfmodellt konfigurációs modellnek nevezzük, és egy ilyen gráfot $CM_n(d)$-vel jelölünk.
Problémát jelenthetne, hogy egy félél hanyadikként kerül sorra, amikor az éleket létrehozzuk, azonban megmutatható, hogy a félélek párosításai felcserélhetőek, vagyis nincs hatása annak, hogy melyiket hanyadikként választjuk.
Megmutatható továbbá az is, hogy ezzel a módszerrel minden n csúcsú d fokszámú gráf egyforma valószínű, és ha feltesszük, hogy G_n egyszerű, akkor az egyenletes véletlen gráfmodellt kapjuk([3] 7.15). Ezt a tulajdonságot így tudjuk jelölni:

$$\mathbb{P}_{CM_n(d)}(G \in A | G \text{ egyszerű}) = \mathbb{P}_{UG_n}(G \in A).$$

Ezek az állítások részletesebben megtalálhatók [3]-ban.

2.15. Állítás. $CM_n(2)$ lokálisan sztochasztikusan konvergál $(\mathbb{Z}, 0)$-hoz.

Bizonyítás A determinisztikus gráfoknál látott módszert fogjuk itt is alkalmazni. Azt tudjuk, az előző fejezetből, hogy ha $\mathcal{I}_\star = \{(\mathbb{Z}, o)\}$, akkor a 2.14 tétel feltételei teljesülnek, így 2.13 miatt elég az alábbi tulajdonságot ellenőrizni:

$$p^{G_n}(H_\star) = \frac{1}{|V(G_n)|} \sum_{u\in V(G_n)} \mathbb{1}_{(B_r^{G_n}(v)\simeq P_{2r})} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

Ellenőrizni fogjuk, hogy $\mathbb{1}_{B_r^{G_n}(v)\simeq P_{2r}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ teljesül

$$\mathbb{E}(|\mathbb{1}_{B_r^{G_n}(v)\simeq P_{2r}} - 1|) = \mathbb{P}(B_r^{G_n}(v) \not\simeq P_{2r}) = \mathbb{P}(|B_r^{G_n}(v)| \leq 2r).$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|B_r^{G_n}(v)| \leq 2r) &= \mathbb{P}(|B_r^{G_n}(v)| \leq 2r | B_r^{G_n}(v) \text{ egyszerű})\mathbb{P}(B_r^{G_n}(v) \text{ egyszerű}) \\ &+ \mathbb{P}(|B_r^{G_n}(v)| \leq 2r | B_r^{G_n}(v) \text{ nem egyszerű})\mathbb{P}(B_r^{G_n}(v) \text{nem egyszerű})\end{aligned}$$

Ekkor az alsó sor tart 0-hoz, mivel $B_r^{G_n}(v)$ 1 valószínűséggel egyszerű. A felső sor konvergenciáját úgy lehet belátni, hogy egy rögzített G gráf realizációjának a valószínűsége ismert, mégpedig:

$$\mathbb{P}(CM_n(d) = G) = \frac{\prod_{i=1}^n d_i!}{((\sum_{i=1}^n d_i)!!)} \frac{1}{\prod_{i=1}^n 2^{x_{ii}} \prod_{i,j} x_{ij}!},$$

amiből kombinatorikus és analitikus módszerekkel megmutatható, hogy a

$$\mathbb{P}(|B_r^{G_n}(v)| \leq 2r | B_r^{G_n}(v) \text{ egyszerű})$$

valószínűség tart 0-hoz. □

2.16. Állítás (A 2-reguláris véletlen gráf gyenge limesze)**.** A 2-reguláris véletlen gráf gyenge limesze is $(\mathbb{Z}, o)$ lesz.

Bizonyítás Ez az állítás következik az előzőből, hisz ha feltesszük, hogy az egész G gráf egyszerű, nem csak egy környezet, a fenti eredmények akkor is érvényben maradnak. □

Hivatkozások

[1] Lovász László. *Large networks and graph limits.* American Mathematical Soc., 2012.

[2] Remco van der Hofstad. *Random graphs and complex networks II.* 2021.

[3] Remco van der Hofstad. *Random graphs and complex networks.* 2018.