Gráfok lokális konvergenciája

May 20, 2021

Motiváció

A célunk egy olyan határérték fogalom bemutatása, ami véletlen gráfok lokális tulajdonságainak vizsgálatát teszi lehetővé. Informálisan ez azt jelenti, hogy ha egy gráf néhány csúcstól leszámítva egy környezetig ugyanúgy néz ki, egy véletlen csúcsot választva ez a környezet nagy valószínűséggel ugyanúgy néz majd ki.
Néhány ilyen lokális tulajdonság, amit vizsgálhatunk:

Motiváció

A célunk egy olyan határérték fogalom bemutatása, ami véletlen gráfok lokális tulajdonságainak vizsgálatát teszi lehetővé.
Informálisan ez azt jelenti, hogy ha egy gráf néhány csúcstól leszámítva egy környezetig ugyanúgy néz ki, egy véletlen csúcsot választva ez a környezet nagy valószínűséggel ugyanúgy néz majd ki.
Néhány ilyen lokális tulajdonság, amit vizsgálhatunk:

1. rögzített k-ra k fokú csúcsok aránya,
2. a gráf lokális (és bizonyos esetekben) globális klaszteresedési együtthatója,
3. összefüggő komponensek száma.

Gyökeres gráfok

Definíció

A (G, o) pár egy gyökeres gráf, ha G egy gráf, és o egy tetszőleges csúcs.
Egy gráf lokálisan véges, ha minden csúcs foka véges.

Definíció

A (G, o) gyökeres gráf esetén $B_r^G(o) = (V(B_r^G(o)), E(B_r^G(o), o))$, ahol

$$V(B_r^G(o)) = \{u \in V(G) : d_G(0, u) \leq r\}$$
$$E(B_r^G(o)) = \{\{u, v\} \in E(G) : d_G(o, u) \leq r, d_G(o, v) \leq r\}$$

Definíció

Legyen (G_1, o_1), (G_2, o_2) 2 összefüggő, gyökeres részgráf. Legyen

$$R^\star = \sup_r \{B_r^{G_1}(o_1) \cong B_r^{G_2}(o_2)\}.$$

Ennek segítségével legyen

$$d_{\mathcal{G}_\star}((G_1, o_1), (G_2, o_2)) = \frac{1}{R^\star + 1}.$$

Az $R^\star$ a legnagyobb olyan érték, amire a 2 gráf lokálisan izomorf. Ha $R^\star = \infty$, akkor a 2 gráf izomorf. A $\mathcal{G}_\star$ a gyökeres gráfok $d_{\mathcal{G}_\star}$ metrikával ellátott metrikus tere.

Lokális gyenge konvergencia determinisztikus gráfokra

Definíció

Legyen $G_n = (V(G_n), E(G_n))$ egy véges gráfsorozat. Legyen továbbá (G_n, o_n) az a gyökeres részgráf, amit úgy kapunk G_n-ből, hogy egyenletes eloszlás szerint kiválasztjuk G_n egy tetszőleges csúcsát, majd G_n-et megszorítjuk az o_n-ből elérhető csúcsok halmazára.

Azt mondjuk, hogy (G_n, o_n) tart (G, o)-hoz lokálisan gyengén, ahol (G, o) a $\mathcal{G}_\star$ egy (elképzelhető, hogy véletlen) μ eloszlású eleme, ha minden $h : \mathcal{G}_\star \to \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény esetén

$$\mathbb{E}(h(G_n, o_n)) \to \mathbb{E}_\mu(h(G, o))$$

teljesül. Ezt a konvergenciát $(G_n, o_n) \xrightarrow{d} (G, o)$-val jelöljük.

A határértékről

Arra, hogy a limesz miért lehet véletlen, elég meggondolni, hogy mi történne abban a $4n$ pontú gráfban, aminél G_n $2n$ darab 1 hosszú útból, és $2n$ darab izolált csúcsból áll. Ennek a gyenge limesze egy véletlen gráf lesz, ami $\frac{1}{2}$ valószínűséggel egy izolált csúcs, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel egy 1 hosszú út.

A határértékről

Arra, hogy a limesz miért lehet véletlen, elég meggondolni, hogy mi történne abban a $4n$ pontú gráfban, aminél G_n $2n$ darab 1 hosszú útból, és $2n$ darab izolált csúcsból áll. Ennek a gyenge limesze egy véletlen gráf lesz, ami $\frac{1}{2}$ valószínűséggel egy izolált csúcs, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel egy 1 hosszú út.

Tétel (A határérték kiszámítása [?] 2.6)

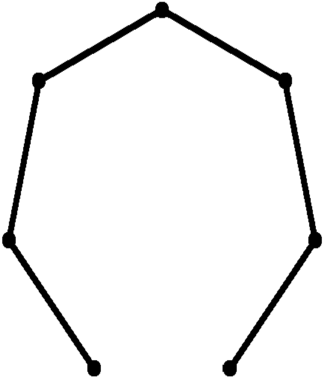
Legyen (G_n, o_n) *véges, gyökeres gráfok egy sorozata. Ekkor* $(G_n, o_n) \xrightarrow{d} (G, o)$ *pontosan akkor, ha minden* $H_\star \in \mathcal{G}_\star$ *és minden* $r \geq 0$ *esetén*

$$p^{G_n}(H_\star) \to \mu(B_r^G(o) \simeq H_\star), \tag{1}$$

ahol

$$p^{G_n}(H_\star) = \frac{1}{V(G_n)} \sum_{u \in V(G_n)} 1_{\{B_r^{G_n}(u) \simeq H_\star\}}$$

Az n csúcsú út, és az n csúcsú kör limesze egyaránt $(\mathbb{Z}, 0)$ lesz.



Véletlen gráfok konvergenciája

Míg determinisztikus esetben a várható érték csupán a választott csúcstól függ a véletlen esetben magától a modelltől is függeni fog. Akárcsak valószínűségi változók esetén, itt is többféle konvergencia fordulhat elő:

Definíció (Véletlen gráfok lokális gyenge konvergenciája)

Legyen $G_n = (V(G_n), E(G_n))$ egy véges (nem feltétlenül összefüggő) véletlen gráf. Ekkor azt mondjuk, hogy G_n lokálisan gyengén tart a $\overline{\mu}$ eloszlású $(\overline{G}, \overline{o})$-hoz, ha minden $h : \mathcal{G}_\star \to \mathbb{R}$ folytonos, korlátos függvény esetén

$$\mathbb{E}(h(G_n, o_n)) \to \mathbb{E}_\mu(h(\overline{G}, \overline{o}))$$

teljesül, ahol a bal oldali várható érték az o_n választása, valamint a G_n eloszlása szerinti. Ezt a determinisztikus esettel analóg módon $(G_n, o_n) \xrightarrow{d} (G, o)$-val jelöljük.

Sztochasztikus és 1 valószínűségű konvergencia

Azt mondjuk, hogy G_n lokálisan sztochasztikusan konvergál a μ eloszlású (G, o)-hoz, ha

$$\mathbb{E}(h(G_n, o_n)|G_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}_\mu(h(G, o)),$$

minden $h : \mathcal{G}_\star \to \mathbb{R}$ folytonos korlátos függvényre. Ezt $G_n \xrightarrow{\mathbb{P}-loc} G$-kal jelöljük. Azt mondjuk, hogy G_n lokálisan 1 valószínűséggel konvergál a μ eloszlású (G, o)-hoz, ha

$$\mathbb{E}(h(G_n, o_n)|G_n) \xrightarrow{1} \mathbb{E}_\mu(h(G, o)),$$

minden $h : \mathcal{G}_\star \to \mathbb{R}$ folytonos korlátos függvényre. Ezt $G_n \xrightarrow{1-loc} G$-kal jelöljük.

Példák

Konfigurációs modell: adott fokszámsorozatú véletlen gráfot szeretnénk generálni. Ha minden csúcs foka 2, akkor a modell konvergens, és a limesze $(\mathbb{Z}, 0)$.
Ebből a 2-reguláris véletlen gráf modellje is megkapható, ami ugyanez lesz.

Cél a jövőre

Véletlen gráfok kezdeti konfiguráció hatásának a vizsgálata.