

Euler irányítások páratlan reguláris gráfokban

Egyéni kutatómunka 2 beszámoló

Borbényi Márton

1 Téma bemutatása

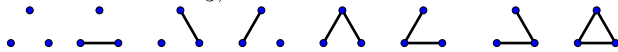
A félév során nem a meghírdetett témámmal foglalkoztunk, hanem témavezetőmmel megjelent cikkünkéből felvetett kérdésekkel [1]. Először felelevenítjük a főbb eredményeket, amikkel dolgoztunk a félév során. Leginkább d -reguláris, n csúcsú gráfokkal foglalkoztunk.

Definíció 1.1. *legyen G egy d -reguláris gráf. Ekkor a részgráf számláló polinomja a G gráfnak az alábbi:*

$$F_G(x_0, x_1, \dots, x_d) = \sum_{A \subseteq E(H)} \prod_{v \in V(H)} x_{d_A(v)},$$

ahol $d_A(v)$ a v csúcs foka a (V, A) részgráfban.

Példa 1.2. *Ha $G = K_3$, akkor*



$$F_G(\underline{x}) = x_0^3 + x_0 x_1^2 + x_0 x_1^2 + x_0 x_1^2 + x_0 x_1^2 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^3$$

Tétel 1.3. *Ez a polinom invariáns marad néhány lineáris leképezésre, azaz vannak $\{A_t^{(d)} \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$ mátrixok úgy, hogy $A_0^{(d)} = A_{2\pi}^{(d)} = id_{n+1}$, $A_s^{(d)} A_t^{(d)} = A_{s+t}^{(d)}$, illetve*

$$F_G(\underline{x}) = F_G(A_t^{(d)} \underline{x}).$$

Példa 1.4. $d = 4$ -re az $R_t^{(4)}$ mátrix a következő:

$$\begin{pmatrix} \cos(t)^4 & 4 \sin(t) \cos(t)^3 & 6 \sin(t)^2 \cos(t)^2 & 4 \sin(t)^3 \cos(t) & \sin(t)^4 \\ -\sin(t) \cos(t)^3 & -3 \sin(t)^2 \cos(t)^2 + \cos(t)^4 & -3 \sin(t)^3 \cos(t) + 3 \sin(t) \cos(t)^3 & -\sin(t)^4 + 3 \sin(t)^2 \cos(t)^2 & \sin(t)^3 \cos(t) \\ \sin(t)^2 \cos(t)^2 & 2 \sin(t)^3 \cos(t) - 2 \sin(t) \cos(t)^3 & \sin(t)^4 - 4 \sin(t)^2 \cos(t)^2 + \cos(t)^4 & -2 \sin(t)^3 \cos(t) + 2 \sin(t) \cos(t)^3 & \sin(t)^2 \cos(t)^2 \\ -\sin(t)^3 \cos(t) & -\sin(t)^4 + 3 \sin(t)^2 \cos(t)^2 & 3 \sin(t)^3 \cos(t) - 3 \sin(t) \cos(t)^3 & -3 \sin(t)^2 \cos(t)^2 + \cos(t)^4 & \sin(t) \cos(t)^3 \\ \sin(t)^4 & -4 \sin(t)^3 \cos(t) & 6 \sin(t)^2 \cos(t)^2 & -4 \sin(t) \cos(t)^3 & \cos(t)^4 \end{pmatrix}$$

A tétel fontossága, hogy egyes leszámolási problémákat el lehet vinni másmilyen leszámolási problémákba. Nevezzük ezeket forgatásnak.

A részgráf számláló polinomot definiálhatjuk irányításokra is, az alábbi módon.

Definíció 1.5.

$$H_G(y_{-d}, y_{-(d-2)}, \dots, y_d) = \sum_{\mathcal{O}} \prod_{v \in V} y_{d_{\mathcal{O}}(v)},$$

ahol $d_{\mathcal{O}}(v)$ a v csúcs irányított foka az \mathcal{O} irányításnál. Ezt a polinomot nevezzük a G gráf irányítási polinomjának.

Példa 1.6. Amennyiben $d = 2k$ páros, akkor $H_G(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ éppen az Euler-irányítások száma, ahol a középső változó, $y_0 = 1$. (Euler irányítások: olyan irányítások, ahol minden csúcs befoka=kifoka)

Tétel 1.7.

$$F_G(x_0, \dots, x_d) = \frac{1}{2^{e(G)}} \sum_{\mathcal{O}} \prod_{v \in V} Q_{(d_{\mathcal{O}}(v))},$$

ahol a $Q = Bx$ valamely alkalmas $B = B^{(d)}$ mátrixra. Sőt, B invertálható is, így visszafelé is működik a transzformáció.

Ez azt jelenti, hogy irányítások számolására is lehet használni a részgráf számláló polinomot.

Példa 1.8. Ha nézzük a $H_G(0, \dots, 1, \dots, 0)$ helyettesítést, ami épp az Euler-irányítások száma, át lehet alakítani, hogy a részgráfszámláló polinommal számoljuk.

Tétel 1.9. Vannak c_d konstansok, hogy az Euler irányítások száma épp

$$F_G(c_d, 0, c_d \frac{1}{d-1}, 0, c_d \frac{1}{d-1} \frac{3}{d-3}, 0, \dots).$$

Tétel 1.10. A fenti kapott vektornak van még egy érdekes tulajdonsága: hiába fordítanánk a Tétel 1.3 alapján, invariáns marad, nem változik.

Ennek a bizonyítása azon múlik, hogy $1 = (\sin^2 t + \cos^2 t)^{n/2} = \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n/2}{i} \sin^{2i} t \cos^{n-2i} t$, de erről még fogunk szót ejteni.

2 Páratlan d

Előző szekcióban láttuk, hogy az Euler irányítások száma éppen $c_d^n F_G(1, 0, \frac{1}{d-1}, 0, \dots)$ alkalmas c_d konstansra. Ezt pedig tudjuk általánosítani, páratlan d -re is definiálható. Ezzel foglalkoztunk a félév során:

- Hogyan viselkedik páratlan d esetén a $s = (1, 0, \frac{1}{d-1}, 0, \dots)$ vektor. Mik a fő tulajdonságai?
- Mi történik, ha elforgatjuk őket?
- Van-e valami kombinatorikai jelentése? Alkalmas c_d^n -nel felszorozva számlál-e valamit?

3 Forgatás

Vegyünk egy $A_t = A_t^{(d)}$ forgatási mátrixot, dobjuk bele az s vektort. Ekkor tudjuk, hogy $F_G(s) = F_G(A_t s) = F_G(s^t)$. Először is, hogyan változik az nulladik koordináta, mi s_0^t :

Lemma 3.1.

$$s_0^t = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{d/2}{k} \cos^{d-2k} t \sin^{2k} t =: P_d(t).$$

Ez páros d esetén ismert: éppen $(\sin^2 t + \cos^2 t)^{d/2} = 1$. Tehát nem változik a 0. koordináta. Az érdekesség, hogy ekkor az összes többi koordináta sem változik, mindnek a deriváltja 0. Tehát páros d esetén nem történik semmi forgatáskor. Ám páratlan d -nél más a helyzet. Ezt ugyanis nem $(\sin^2 t + \cos^2 t)^{d/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d/2}{k} \cos^{d-2k} t \sin^{2k} t$, a $d/2$ utána tagok is nem nullák. És a koordináta változni is fog.

Lemma 3.2.

$$\partial_t \left[\sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{d/2}{k} \cos^{d-2k} t \sin^{2k} t \right] = -C_d \sin^d t,$$

ahol C_d az s vektor utolsó eleme, s_d . Ez páros d esetén 0, páratlannál pedig $\frac{1}{d-1} \frac{3}{d-3} \dots \frac{d-2}{2}$.

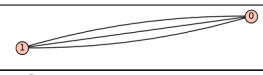
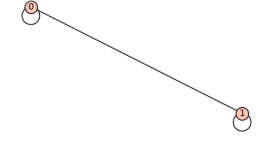
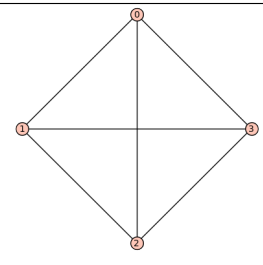
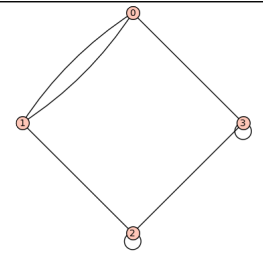
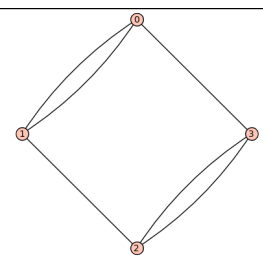
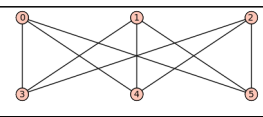
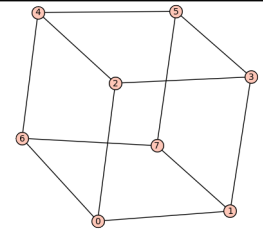
t	$d = 3$	$d = 5$	$d = 7$
0	(1, 0, 1/2, 0)	(1, 0, 1/4, 0, 3/8)	(1, 0, 1/6, 0, 3/24, 0, 5/16)
$-\pi/6$	$\frac{1}{16}(9\sqrt{3}, 1, 3\sqrt{3}, 11)$	$\frac{1}{256}(147\sqrt{3}, 3, 33\sqrt{3}, 17, 27/\sqrt{3}, 203)$	
$-\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{8}(5, 1, 1, 5)$	$\frac{\sqrt{2}}{64}(43, 3, 7, 7, 3, 43)$	
$-\pi/3$	$\frac{1}{16}(11, 3\sqrt{3}, 1, 9\sqrt{3})$	$\frac{1}{256}(203, 27\sqrt{3}, 17, 33\sqrt{3}, 3, 147\sqrt{3})$	
$-\pi/2$	(0, 1/2, 0, 1)	(0, 3/8, 0, 1/4, 0, 1)	(5/16, 0, 3/24, 0, 1/6, 0, 1)
π	(-1, 0, -1/2, 0)	(-1, 0, -1/4, 0, -3/8, 0)	(-1, 0, -1/6, 0, -3/24, 0, -5/16)
$\pi/2$	(0, -1/2, 0, -1)	(0, -3/8, 0, -1/4, 0, -1)	(-5/16, 0, -3/24, 0, -1/6, 0, -1)
2π	(1, 0, 1/2, 0)	(1, 0, 1/4, 0, 3/8)	(1, 0, 1/6, 0, 3/24, 0, 5/16)

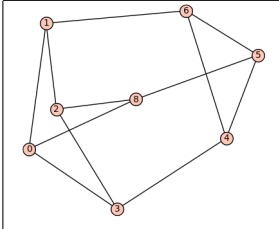
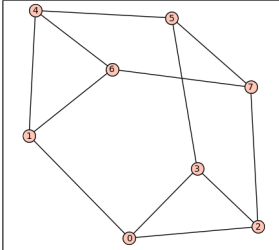
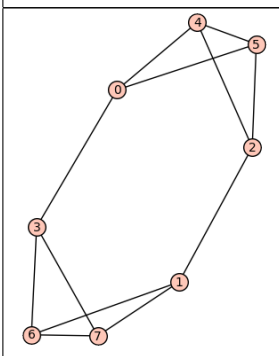
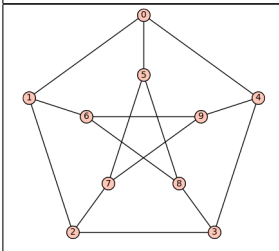
Sajnos ezek egyike sem mutat semmiféle kombinatorikai jelentést. Ezekből a számokból nem látszódik semmi. Ám páros d -re se tudunk meg sok minden, ám ha az irányítási polinomot vizsgáljuk, sokkal több minden kiderül. Ott látjuk, hogy ez az Euler irányításokat kódolja. Tehát csináljuk vissza páratlan d esetén is, milyen vektort kell beírni az irányítási polinomba. Ám itt nem mindegy hogyan transzformáljuk vissza. Míg páros d esetben nem volt értelme fordítani, addig itt igen. Azaz vehetjük az s vektort, elfordítjuk, majd visszatranszformáljuk a párosításos polinomba. Mostantól csak $d = 3$ -mal foglalkozunk.

t	$d = 3$
0	(-1/2, 3/2, 3/2, -1/2)
$\pi/2$	($i/2, 3i/2, -3i/2, -i/2$)
π	(1/2, -3, 2, -3, 2, 1/2)
$\pi/3$	(1/2, 3/4 + 3/4 $\sqrt{3}i, 3/4 - 3/4\sqrt{3}i, 1/2$)

Sajnos ez sem mutat semmilyen kombinatorikai leszámítását. A legtöbb forgatás során a komplex i is bekerül, ami mégjobban megnehezíti a problémát. Valójában nem szabad fordítani (csak π többszörössel, de akkor meg gyakorlatilag nem csinálunk semmit).

4 Értékek

Gráf	Név	n	$F_G(s)$	$c_3 = 2$	Prímfelbontás
		2	$\frac{9}{4}$	9	3^2
		2	$\frac{7}{4}$	7	7
	K_4	4	$\frac{27}{16}$	27	3^4
		4	$\frac{29}{16}$	29	29
		4	$\frac{45}{16}$	45	$3^2 \cdot 9$
	$K_{3,3}$	6	$\frac{53}{32}$	106	$2 \cdot 53$
	Kocka	8	$\frac{425}{256}$	425	$5^2 \cdot 19$

		8	$\frac{27}{16}$	432	$2^4 \cdot 3^3$
		8	$\frac{441}{256}$	441	$3^2 \cdot 7^2$
		8	$\frac{447}{256}$	477	$3^2 \cdot 53$
	Petersen	10	$\frac{837}{512}$	1674	$2 \cdot 3^3 \cdot 31$

Hivatkozások

- [1] M. BORBÉNYI AND P. CSIKVÁRI, *Counting degree-constrained subgraphs and orientations*, Discrete Mathematics, **343** (2020), p. 111842.