Egyéni kutatómunka 1

Geng Máté

Témavezető: Keleti Tamás

A kutatómunkám célja az volt, hogy Laczkovich Miklós példatárának feldolgozásával mélyítsem a mértékelméleti tudásomat, megismerjem a mértékelmélet különböző területeit, ezekben használt megoldási módszereket sajátítsak el, és a megismert módszerek és állítások segítségével jobban átlássam a matematika ezen területét. A példatár egészen az alapoktól indít a különböző halmazrendszerek bevezetésével, az additív halmazfüggvények, a Borel-halmazok, a Lebesgue-mérték, a Lebesgue-integrál témakörét körbejárva. Ezek után kiterjed az abszolút folytonosság, szingularitás és a differenciálás témakörére is. Nem sikerült teljesen befejeznem a példatárat, a differenciálás és a mértékek differenciálása fejezetekig még nem jutottam el. Az összefoglalóban megpróbáltam összeszedni néhány olyan feladatot, amelyek különböző megoldási ötleten alapulnak, illetve az abszolút folytonos függvények szép karakterizációját és az ahhoz szükséges állításokat.
Ezenkívül részben feldolgoztam John C. Oxtoby Measure and Category című könyvét, ebből válogattam ki néhány témakört amelyeket megemlítek a beszámolóban.

Feladat 1. (i) Ha $A, B \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazok, melyekre $\lambda(A), \lambda(B) > 0$, akkor van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $\lambda(A \cap (B + x)) > 0$.
(ii) Ha $A, B \subset [0, 1]$ Lebesgue-mérhető halmazok, akkor van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy

$$\lambda(A \cap (B + x)) \geq \frac{1}{2} \cdot \lambda(A)\lambda(B)$$

Csak (i)-t bizonyítjuk. A (ii) pont könnyedén következik (i)-ből, de a lényegi gondolat az (i) bizonyításában van, mégpedig az, hogy a síkon definiálunk egy halmazt és annak a mértékét kétféleképpen számítjuk ki a Fubini-tétel segítségével.

Bizonyítás. (i) Feltehetjük, hogy A és B F_σ halmazok, hiszen a Lebesgue-mérték regularitása miatt előállnak egy F_σ és egy nullmértékű halmaz uniójaként, és a nullmértékű részt elhagyhatjuk, az nem befolyásolja az A, B és $A \cap (B + x)$ halmazok mértékét. Legyen

$$H = \{(x, y) : y \in A \cap (B + x)\}$$

Ekkor H szintén F_σ halmaz, ha ugyanis $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ és $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$, ahol A_i, B_j kompaktak, akkor

$$H_{i,j} = \{(x, y) : y \in A_i \cap (B_j + x)\}$$

is kompakt minden i, j-re, és H ezek uniója, tehát F_σ, tehát mérhető.
A H_x szekció egynlő $A \cap (B + x)$-szel. Így a Fubini-tétel szerint

$$\lambda_2(H) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(A \cap (B + x))d\lambda(x).$$

A H^y szekció azon x-ek halmaza, melyekre $y \in A \cap (B + x)$. Tehát $H^y = \emptyset$, ha $y \notin A$ és $H^y = (-B) + y$, ha $y \in A$. Így a Fubini-tétel szerint

$$\lambda_2(H) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(H^y)d\lambda(y) = \int_A \lambda(H^y)d\lambda(y) = \lambda(A)\lambda(B)$$

Ha $\lambda(A), \lambda(B) > 0$, akkor az integrál értéke pozitív, tehát van olyan x, hogy $\lambda(A \cap (B+x)) > 0$. ezel (i)-t beláttuk. $\square$

A következő példában érdekes példát láthatunk a végtelen Ramsey-tétel alkalmazására.

Feladat 2. Legyenek $\vartheta_1, \vartheta_2, ...$ végesen additív halmazfüggvények az $\mathcal{A}$ gyűrűn. Ha egyik ϑ_n sem azonosan nulla, akkor az alábbi állítások legalább egyike igaz:
(i) Vannak páronként diszjunkt $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ halmazok és különböző $n_1, n_2, ...$ indexek úgy, hogy $\vartheta_{n_i}(A_i) \neq 0$ minden $i = 1, 2, ...$-re.
(ii) Van olyan $A \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy $\vartheta_n(A) \neq 0$ végtelen sok n-re.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (ii) nem igaz, és ebből belátjuk, hogy akkor (i) teljesül.
Legyen $A_1 \in \mathcal{A}$ olyan halmaz, amelyre $\vartheta_1(A_1) \neq 0$. Tegyük fel, hogy $n > 1$, és hogy az $A_1, ..., A_{n-1}$ halmazokat már definiáltuk. legyen $B \in \mathcal{A}$ olyan halmaz, amelyre $\vartheta_n(B) \neq 0$. Tekintsük a $B \cap C_1 \cap ... \cap C_{n-1}$ alakú halmazokat, ahol $C_i = A_i$ vagy $C_i = B \setminus A_i$ minden $i = 1, 2, ..., n-1$-re. Ezek a halmazok diszjunktak és az uniójuk B, tehát van közöttük olyan, amelyen ϑ_n nem nulla. Válasszunk egy ilyen halmazt, és jelöljük A_n-nel. Világos, hogy minden $i < n$-re vagy $A_i \cap A_n = \emptyset$ vagy $A_i \supset A_n$. Ezzel definiáltuk az A_n halmazokat minden n-re. A konstrukcióból világos, hogy $\vartheta_n(A_n) \neq 0$. A Ramsey-tétel alkalmazásával kapunk egy $n_1 < n_2 < ...$ indexsorozatot úgy, hogy vagy $A_{n_i} \cap A_{n_j} = \emptyset$ minden $i < j$-re, vagy pedig $A_{n_1} \supset A_{n_2} \supset ....$ Az első esetben az (i) állítás igaz, feltehetjük tehát, hogy a második eset áll fenn. A jelölés egyszerűsításe érdekében hagyjuk el az n_i sorozathoz nem tartozó indexeket és írjunk A_{n_i} helyett A_i-t és ϑ_{n_i} helyett ϑ_i-t. Mivel az indirekt feltevés szerint a (ii) állítás nem igaz, van olyan k_1 index, hogy $\vartheta_{k_1}(A_1) = 0$ Ekkor a $B_1 = A_1 \setminus A_{k_1}$ halmazra $\vartheta k1(B_1) = \vartheta_{k_1}(A_1) - \vartheta_{k_1}(A_{k_1}) \neq 0$, mert $\vartheta_{k_1}(A_{k_1}) \neq 0$. Ismét az indirekt feltevés miatt van olyan $k_2 > k_1$ index, hogy $\vartheta_{k_2}(A_{k_1}) = 0$. Ekkor a $B_2 = A_{k_1} \setminus A_{k_2}$ halmazra $\vartheta_{k_2}(B_2) = \vartheta_{k_2}(A_{k_1}) - \vartheta_{k_2}(A_{k_2}) \neq 0$, mert $\vartheta_{k_2}(A_{k_2}) \neq 0$. Az eljárást folytatva kapjuk a $k_1 < k_2 < ...$ indexeket úgy, hogy $\vartheta_{k_{i+1}}(A_{k_i}) = 0$ minden i-re. Ekkor a $B_i = A_{k_i} \setminus A_{k_{i+1}}$ halmazok páronként diszjunktak és $\vartheta_{k_i}(A_{k_i}) \neq 0$ minden i-re. Ezzel beláttuk, hogy (i) ebben az esetben is igaz. $\square$

A következő állítás közismert, az egy elemű függvényrendszer egyenletes integrálhatóságáról szól, megszokott megoldási módszere van, mégpedig hogy korlátos (vagy más esetben valamely szép tulajdonságú függvényekkel) közelítünk meg pontonként egy függvényt és utána Nagy-Lebesgue-tételt alkalmazunk. Egy későbbi feladatnál szükségünk is lesz erre az állításra.

Feladat 3. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, és $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ integrálható. Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $b \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ és $\mu(B) < \delta$, akkor $\int_B |f| d\mu < \varepsilon$.

Bizonyítás. Ha f korlátos, és $|f| \leq K$, akkor $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$ megfelel, hiszen ha $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ és $\mu(B) < \delta$, akkor $\int_B |f| d\mu \leq \int_B K d\mu = K \cdot \mu(B) < \varepsilon$.
Most legyen $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ tetszőleges integrálható függvény. Legyen $f_n(x) = |f(x)|$, ha $|f(x)| \leq n$, és legyen $f_n(x) =$ egyébként. Ekkor $|f_n| \leq |f|$ és $f_n \to |f|$ μ-m.m. A-n (csak ott nem, ahol $|f|$ végtelen, de ez a halmaz az integrálhatóság miatt nullmértékű). Így a nagy Lebesgue-tétel szerint $\displaystyle\int_A f_n d\mu \to \int_A |f| d\mu$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Válasszunk egy olyan n-et, amelyre $\displaystyle\left| \int_A |f| d\mu - \int_A f_n d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel $|f_n| \leq n$, ezért, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2n}$ megfelel a feltételnek: ha $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ és $\mu(B) < \delta$, akkor

$$\int_B |f| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_B f_n d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

Korlátos változású függvények

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény *totális variációja* a $V_F = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ számok halmazának szuprémuma, ahol $F : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ befutja az $[a, b]$ intervallum felosztásainak halmazát. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény *korlátos változású*, ha $V(f; [a, b]) < \infty$.

Feladat 4. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Minden $y \in \mathbb{R}$-re jelöljük $N(y)$-nal $f^{-1}(y)$ számosságát, ha ez véges, illetve legyen $N(y) = \infty$, ha $f^{-1}(y)$ végtelen. Mutassuk meg, hogy az N függvény Borel-mérhető $\mathbb{R}$-en, és $\int_{\mathbb{R}} N d\lambda = V(f; [a, b])$. *(Banach tétele)*

Bizonyítás. Jelölje $V(f; [a, b])$ az f függvény totális variációját az $[a, b]$ intervallumon. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő részre, és legyen az így kapott felosztás $F_n : a = x_0^n < x_1^n < ... < x_n^n = b$.Legyen $m_i^n = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}^n, x_i^n]\}$ és $M_i^n = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}^n, x_i^n]\}$ és legyenek $u_i^n, v_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ olyan pontok, melyekre $f(u_i^n) = m_i^n$, $f(v_i^n) = M_i^n$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Jelöljük F_n^*-gal azt a felosztást, amit úgy kapunk, hogy F_n-hez hozzávesszük az u_i^n, v_i^n pontokat minden i-re. ha f-nek az F_n, illetve F_n^* felosztásokhoz tartozó variációs összege V_n, illetve V_n^*, akkor $n \to \infty$ esetén $V \to V(f; [a, b])$ és $V_n^* \to V(f; [a, b])$. Jelöljük k_i^n-nel az $f([x_{i-1}, x_i))$ szakasz karakterisztikus függvényét minden $1 \leq i < n$-re, továbbá legyen k_n^n az $f([x_{n-1}, x_n])$ szakasz karakterisztikus függvénye. Ha $N_n = \sum_{i=1}^{n} k_i^n$, akkor $N_n(y)$ egyenlő az F_n felosztás azon osztóintervallumainak számával, amelyekben f felveszi az y értéket. Ebből egyszerűen következik, hogy $n \to \infty$ esetén N_n pontonként N-hez tart, és így N Borel-mérhető. Mivel

$$|f(x_i^n) - f(x_{i-1}^n)| \leq M_i^n - m_i^n = |f(v_i^n) - f(u_i^n)| = \int_{-\infty}^{\infty} k_i^n(y) dy,$$

így $V_n \leq \int_{-\infty}^{\infty} N_n(y) dy \leq V_n^*$ minden n-re. Az is könnyen látható, hogy az N_{2^n} függvénysorozat monoton növő. Ha tehát $n \to \infty$, akkor a monotonkonvergenciatétel szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(y) dy = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N_{2^n}(y) dy = V(f; [a, b]).$$

□

Abszolút folytonosság

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt *abszolút folytonosnak* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $[a_i, b_i] (i = 1, 2, ..., n)$ egymásba nem nyúló intervallumok $[a, b]$-ben, melyekre $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$, akkor $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.
Azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény rendelkezik az (N) tulajdonsággal, ha minden nullmértékű $H \subset [a, b]$ halmazra $f(H)$ is nullmértékű.
Azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény rendelkezik az (S) tulajdonsággal, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $H \subset A$, $\lambda(H) < \delta$ esetén $\lambda(f(H)) < \varepsilon$.
Feladat 5. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos, akkor (N) tulajdonságú.

□

Feladat 6. Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos, akkor (S) tulajdonságú.

□

Feladat 7. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Az alábbi állítások ekvivalensek:
(i) Az f függvény (S) tulajdonságú.
(ii) Az f függvény (N) tulajdonságú, és m.m. értéket csak véges sokszor vesz fel.

$\square$

Feladat 8. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha folytonos, korlátos változású, és (N) tulajdonságú. (*Banach és Zareckij tétele)*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos. Ekkor létezik egy $\delta > 0$ a következő tulajdonsággal: ha az $[a_i, b : i] \subset [a,b](i = 1,2,...,n)$ intervallumok egymásba nem nyúlóak és $\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < 1$. Legyen $a = c_0 < c_1 < ... < c_k = b$ egy olyan felosztás, amelyeknek az osztóintervallumai rövidebbek δ-nál. Ekkor $f$totális variációja a $[c_{j-1}, c_i]$ intervallumon legfeljebb 1 minden $j = 1,2,...,k$-ra Ugyanis tetszőleges $c_{j-1} = x_0 < x_1 < ...x_n = c_j$ felosztásra az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok egymásba nem nyúlóak és $\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1} = c_j - c_{j-1} < \delta$, tehát $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < 1$. Ezzel beláttuk, hogy f totális variációja a $[c_{j-1}, c_j]$ intervallumokon legfeljebb 1, ezért f korlátos változású $[0,1]$-ben. Mivel f nyilvánvalóan folytonos, és (N) tulajdonságú is **Feladat 5.** szerint, így a feladat "csak akkor" részét beláttuk.
Az állítás másik irányát bizonyítandó tegyük fel, hogy f folytonos, korlátos változású, és (N) tulajdonságú. Ekkor Banach tétele (**Feladat 4.**) szerint f m.m. értéket csak véges sokszor vesz fel, tehát a **Feladat 7.** szerint (S) tulajdonságú. Jelöljük $N(y)$-nal $f^{-1}(y)$ számosságát, ha ez véges, illetve legyen $N(y) = \infty$, ha $f^{-1}(y)$ végtelen. Legyenek $[a_i, b_i] \subset [a,b](i = 1,2,...,n)$ egymásba nem nyúló intervallumok. Legyen $J_i = f((a_i, b_i))$ minden i-re. Ekkor $J_1, J_2, ...$ olyan (esetleg elfajuló) intervallumok, melyekre $|J_i| \geq |f(b_i) - f(a_i)|$ minden i-re. Ha $J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$, akkor

$$J = \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |J_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \int_J \chi_{J_i} d\lambda = \int_J \sum_{i=1}^{\infty} \chi J_i d\lambda \leq \int_J N d\lambda \tag{1}$$

A $\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{J_i} \leq N$ egyenlőtlenség abból következik, hogy az (a_i, b_i) intervallumok páronként diszjunktak. Mármost N integrálható $\mathbb{R}$-en a Banach-tétel szerint. Így **Feladat 3.** állítása szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\eta > 0$, hogy ha $B \subset \mathbb{R}$ és $\lambda(B) < \eta$, akkor $\int_B N d\lambda < \varepsilon$.
Az f függvény (S) tulajdonsága alapán alkalmas $\delta > 0$-ra, ha $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$, akkor $\lambda(J) < \eta$, és így (1)-ben $\int_J N d\lambda < \varepsilon$. Ezzel beláttuk, hogy f abszolút folytonos.

$\square$

Liouville-számok

A $x \in \mathbb{R}$ számot *Liouville-számnak* hívjuk, ha irracionális és minden pozitív egész n-re léteznek p és $q > 1$ egészek, hogy $\left| z - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^n}$
Például $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$ egy Liouville-szám (adott n-hez $q = \frac{1}{10^{n!}}$ jó lesz alkalmas p-vel)
Vizsgáljuk meg a Liouville-számok L halmazát kategória és mérték szempontjából. A definícióból következik, hogy

$$L = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} G_n \tag{2}$$

ahol

$$G_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right) \tag{3}$$

G_n nyílt halmaz, sőt tartalmaz minden $\frac{p}{q}$ alakú számot, $q \leq 2$, így $\mathbb{Q} \subset G_n$. Tehát G_n sűrű nyílt halmaz, vagyis a metszetük a Baire-kategóriatétel szerint sűrű nyílt halmaz. Mivel az irracionális számok halmaza is az, ezért L reziduális halmaz, tehát kategória szempontjából nagyon nagy.
Mi a helyzet mérték szempontjából? (3)-ből következik, hogy $L \subset G_n$ minden n-re Legyenek

$$G_{n,q} = \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right) \qquad (q = 2, 3, ...)$$

Minden m, n pozitív egész számra

$$L \cap (-m, m) \subset G_n \cap (-m, m)$$

$$= \bigcup_{q=2}^{\infty} [G_{n,q} \cap (-m, m)] \subset \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)$$

Tehát $L \cap (-m, m)$ lefedhető egy intervallumok egy olyan sorozatával, amelyek hossz összege minden $n > 2$-re

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \frac{2}{q^n} = \sum_{q=2}^{\infty} (2mq + 1) \frac{2}{q^n} \leq \sum_{q=2}^{\infty} (4mp + q) \frac{1}{q^n}$$

$$= (4m + 1) \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{n-1}} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{n-1}} dx = \frac{4m + 1}{n - 2}$$

Mivel n tetszőleges volt, ezért következik, hogy $L \cap (-m, m)$ nullmértékű minden m-re, így L is. L tehát mérték szempontból kicsi, de kategória szempontból nagy. További vizsgálódások nyomán az derül ki, hogy L még egy erősebb értelemben is kicsi a mértékes megközelítésből. Vizsgáljuk L s dimenziós Hausdorff-mértékeit.

Tétel. L s-dimenziós Hausdorff mértéke 0 minden $s > 0$-ra.

Bizonyítás. Elég találnunk minden $\varepsilon > 0$-hoz és m pozitív egészhez olyan I_n intervallumokat, amelyekre

$$L \cap (-m, m) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n \ , \ \sum_{i=1}^{\infty} |I_n|^s < \varepsilon, \text{ és } |I_n| < \varepsilon$$

Minden pozitív egész n-re

$$L \cap (-m, m) \subset \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)$$

Válasszuk n-et úgy, hogy egyszerre teljesítse a következő feltételeket:

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon \ , \ ns > 2 \text{ és } \frac{(2m+1)2^s}{ns - 2} < \varepsilon$$

Világos, hogy ez megtehető, ha n elég nagy. Ekkor a $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right)$ intervallumok hossza $\frac{2}{q^n} \leq \frac{2}{2^n} \leq \varepsilon$ és

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{2}{q^n} \right)^s = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(2mq + 1)2^s}{q^{ns}}$$

$$\leq (2m + 1)2^s \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^{ns-1}} \leq (2m + 1)2^s \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{ns-1}} dx$$

$$\leq \frac{(2m+1)2^s}{ns-2} < \varepsilon.$$

□

Tehát L egy 0-dimenziós halmaz, viszont korábban láttuk, hogy sűrű G_δ halmaza $\mathbb{R}$-nek, vagyis kontinuum számosságú, így L példa egy olyan halmazra, amely nem σ-véges a saját dimenziója szerint.

A Riemann-integrálható függvények tere

Egy másik fejezetben metrikus terekre láthattunk különböző példákat. Volt közöttük már jól ismert, például a z $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények tere a szuprémum normával illetve a véges Lebesbue-mértékű mérhető halmazok tere, ahol a metrika $\varrho(E, F) = \lambda(E \vartriangle F)$. Ezek teljes metrikus terek, de volt példa nem teljes metrikus térre is, pl. az $[a, b]$-n folytonos függvények tere a $\sigma(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ metrikával. Egy fokkal izgalmasabb a Riemann-integrálható függvények tere, ami egy rajta természetesnek tűnő metrikával önmagában első kategóriájú lesz. Erre szeretnék kitérni kicsit részletesebben.
Tekintsük tehát az $R[a, b]$ Riemann integrálható függvények terét és ezen a

$$\sigma(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

távolságfüggvényt. Ez nem lesz metrika, mert ha például $f, g \in R[a, b]$ m.m. megegyeznek, akkor $\sigma(f, g) = 0$. Tekintsük ezért $R[a, b]$-n a következő ekvivalenciarelációt $f \sim g \iff \int_a^b |f(x) - g(x)| = 0$ Ezen ekvivalenciarelációval való faktorizálás után kapjuk az $(\tilde{R}, \sigma)$ metrikus teret. Jelölje $\tilde{f}$ az $f \in R[a, b]$ függvény ekvivalenciaosztályát. Minden pozitív egész M-re legyen

$$E_M = \{\tilde{f} : f \in R[a, b] \text{ és } |f| \leq M\}$$

Mivel minden Riemann-integrálható függvény korlátos, ezért $\tilde{R} = \bigcup\limits_{M=1}^{\infty} E_M$. Minden $\tilde{f}_0 \in E_M$ $|f_0| \leq M$-re legyen $g = f_0 + (2M + 1)\chi_I$, ahol χ_I az indikátor függvénye egy $[a, b]$-ben lévő ε hosszú intervallumnak. Ekkor $\sigma(\tilde{f}_0, \tilde{g}) = (2M + 1)\varepsilon$. Ha $|f| < M$, akkor $|g - f| \geq 1$ I-n, és így $\sigma(\tilde{f}_0, \tilde{g}) \geq \varepsilon$. Így $\tilde{g}$ ε sugarú környezetének egyetlen eleme sincs benne E_M-ben. Miután $\tilde{g}$ tetszőlegesen közel vehető $\tilde{f}_0$, ebből adódik, hogy E_M sehol sem sűrű $\tilde{R}$-ban. Így $\tilde{R}$ első kategóriájú önmagában. Ennek következménye, hogy $\tilde{R}$ nem teljes mertikus tér, hovatovább semmilyen más metrikával sem lesz teljes (ami ugyanezt a topológiát generálja), hiszen a kategória topologikus tulajdonság.

A Banach-kategória tétel

Egy topologikus térben, aminek van megszámlálható bázisa világos, hogy első kategóriájú nyílt halmazok családjának uniója első kategóriájú. Tekintsük ugyanis azon báziselemeket, amelyek részei a halmazcsalád legalább egy elemének. Ezek uniója pont a halmazcsalád uniója, így az uniót felírtuk megszámlálható unióként, amiből adódik az állítás. Ez az érvelés ugyanúgy működik mértékekre (amelyek definiálva vannak a nyílt halmazokon) is, azaz M_2 térben nullmértékű nyílt halmazok uniója nullmértékű. Érdekes módon az első állítás igaz marad teteszőleges topologikus térben, míg a másodikhoz már kellenek plusz feltételek. Most csak a kategóriás állítással foglalkozunk.

Tétel. (Banach kategória tétel) Tetszőleges X topologikus térben első kategóriájú nyílt halmazok tetszőleges családjának uniója első kategóriájú.

Bizonyítás. Legyen G az uniója első kategóriájú nyílt halmazok egy $\mathcal{G}$ családjának. Legyen $\mathcal{F} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ maximális családja diszjunkt nemüres nyílt halmazoknak, amelyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy mindegyikük részhalmaza $\mathcal{G}$ egy elemének. Ekkor a $\overline{G} \setminus \bigcup \mathcal{F}$ zárt halmaz sehol sem sűrű, különben $\mathcal{F}$ nem lenne maximális. Nyilván minden U_α halmaz is első kategóriájú, ezért felírható $U_\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{\alpha,n}$ alakban, ahol $N_{\alpha,n}$ sehol sem sűrű. Legyen $N_n = \bigcup_{\alpha \in A} N_{\alpha,n}$. ha egy nyílt halmaz metszi N_n-t, akkor azt megteszi valamely $N_{\alpha,n}$-ben és így létezik egy nemüres $V \subset (U \cap U_\alpha) \setminus N_{\alpha,n}$. Így $V \subset U \setminus N_n$, és így N_n sehol sem sűrű. Tehát

$$G \subset \left(\overline{G} \setminus \bigcup \mathcal{F}\right) \cup \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \left(\overline{G} \setminus \bigcup \mathcal{F}\right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$$

első kategóriájú.

□

Források

Laczkovich Miklós: 333 mértékelméleti feladat

John C. Oxtoby: Measure and Category