Mértékelmélet

Egyéni kutatómunka 1

Geng Máté

ELTE

Megoldási ötletek

Feladat. Ha $A, B \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazok, melyekre $\lambda(A), \lambda(B) > 0$, akkor van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $\lambda(A \cap (B + x)) > 0$.

Ötlet: Megfelelő síkbeli halmaz definiálása és mértékének kiszámítása Fubini-tétellel kétféle módon is.

Feladat Legyenek $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ végesen additív halmazfüggvények az $\mathcal{A}$ gyűrűn. Ha egyik ϑ_n sem azonosan nulla, akkor az alábbi állítások legalább egyike igaz:
(i) Vannak páronként diszjunkt $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ halmazok és különböző $n_1, n_2, \ldots$ indexek úgy, hogy $\vartheta_{n_i}(A_i) \neq 0$ minden $i = 1, 2, \ldots$-re.
(ii) Van olyan $A \in \mathcal{A}$ halmaz, hogy $\vartheta_n(A) \neq 0$ végtelen sok n-re.

Ötlet: Definiáljunk egy olyan halmazrendszert, amely "szépen viselkedik", azaz minden $i < j$ párra $A_i \cap A_j = \emptyset$, vagy $A_i \supset A_j$, majd alkalmazzuk a végtelen Ramsey-tételt

Megoldási ötletek

Feladat Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, és $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ integrálható. Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ és $\mu(B) < \delta$, akkor $\int_B |f| d\mu < \varepsilon$.

Ötlet: Korlátos függvényre triviális az állítás, az általános esetben tartsunk korlátos függvényekkel pontonként f-hez.

Feladat Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Minden $y \in \mathbb{R}$-re jelöljük $N(y)$-nal $f^{-1}(y)$ számosságát, ha ez véges, illetve legyen $N(y) = \infty$, ha $f^{-1}(y)$ végtelen. Mutassuk meg, hogy az N függvény Borel-mérhető $\mathbb{R}$-en, és $\int_{\mathbb{R}} N d\lambda = V(f; [a, b])$.

Ötlet: Megfelelő felosztásokat vizsgálva, az osztóintervallumok képeinek karakterisztikus függvényeinek összegei pontonként tartanak N-hez.

Abszolút folytonosság

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos, akkor (N) tulajdonságú.

Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos, akkor (S) tulajdonságú.

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) Az f függvény (S) tulajdonságú.

(ii) Az f függvény (N) tulajdonságú, és m.m. értéket csak véges sokszor vesz fel.

Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha folytonos, korlátos változású, és (N) tulajdonságú. (*Banach és Zareckij tétele)*

Liouville számok

A $x \in \mathbb{R}$ számot *Liouville-számnak* hívjuk, ha irracionális és minden pozitív egész n-re léteznek p és $q > 1$ egészek, hogy $\left|z - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^n}$

Bizonyos értelemben nagy, más értelemben pedig kicsi halmaz.

Sűrű G_δ halmaz, azaz reziduális, de 0-mértékű. Sőt a Hausdorff-dimenziója is 0, annak ellenére, hogy kontinuum számosságú.

Riemann-integrálható függvények

$R[a, b]$ az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények tere, ezen távolságfüggvény a $\sigma(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

Lefaktorizálás után metrika, $(\tilde{R}, \sigma)$ metrikus tér.

$E_M = \{\tilde{f} : f \in R[a, b]$ és $|f| \leq M\}$ sehol sem sűrű halmazok.

Ekkor $\tilde{R} = \bigcup\limits_{M=1}^{\infty} E_M$ első kategóriájú.

Banach kategória-tétel

Tétel. (Banach kategória tétel) Tetszőleges X topologikus térben első kategóriájú nyílt halmazok tetszőleges családjának uniója első kategóriájú.

A trükk az, hogy ha vesszük $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ első kategóriájú nyílt halmazok maximális diszjunkt rendszerét, és az $U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\alpha,n}$ felbontásukat, ahol $N_{\alpha,n}$ sehol sem sűrű, akkor α-k helyett n-ekre uniózva is első kategóriájú halmazt kapunk, viszont így csak megszámlálható sokat.

Mértékelméleti megfelelője is van a tételnek, viszont ahhoz további feltételek kellenek, mégpedig azok, hogy metrikus térben legyünk és a nyílt halmazok rendszerének számossága ne legyen mérhető.