Kano három sejtésének egy általánosítása

Keszthelyi Szilvia

Témavezető: Bérczi Kristóf
Operációkutatási Tanszék
ELTE TTK, Matematikai Intézet

1. Bevezetés

Az önálló projekt célja Kano [3] négy, gráfokra vonatkozó sejtésének általánosítása volt matroidokra. A négy sejtésből az elsőt Mayr és Plaxton [5] bizonyította, a többi továbbra is nyitott, csak speciális esetekben lettek igazolva.

Legyen $G = (V, E)$ gráf és $c\colon E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény az éleken és $\mathcal{W}(G)$ jelölje a G-ben előforduló feszítő fák lehetséges súlyainak halmazát.

1.1. Tétel. *Ha T minimális súlyú feszítő fa G-ben, akkor T-ből legfelejebb $i-1$ élcserével megkapható egy i-edik minimális súlyú feszítő fa minden $1 \leq i \leq |\mathcal{W}(G)|$-re.*

1.2. Sejtés. *Ha T i-edik minimális súlyú feszítőfa a T-ből legfelejebb i élcserével megkapható feszítő fák között, akkor T i-edik minimális súlyú G-ben is.*

1.3. Sejtés. *Ha T i-edik minimális súlyú feszítőfa G-ben, akkor T i-edik minimális súlyú a T-ből legfelejebb $i-1$ élcserével megkapható feszítő fák között.*

1.4. Sejtés. *Jelölje $G(i, j)$ azt a gráfot, amelynek csúcshalmaza G i-edik minimális súlyú feszítő fáiból áll és két pont között pontosan akkor vezet él, ha a nekik megfelelő fák legfelejebb j élcserével megkaphatóak egymásból. Ekkor $G(i, i)$ összefüggő.*

Mayr és Plaxton [5] bizonyítása az 1.1 tételre az alábbi észrevételen alapul.

1.5. Tétel. *Ha $G = (V, E)$ gráf az éldiszjunkt T_1 és T_2 feszítő fák uniója, ahol $c(T_1) > c(T_2)$, T_1 c-egyedi és T_2 minimális súlyú feszítő fa, akkor G-ben van legalább $n-1$ feszítő fa, melyek súlya páronként különböző és kisebb mint $c(T_1)$.*

A tétel matroidokra átfogalmazva is igaz marad, ugyanis a bizonyítás nem használja a grafikus matroidok speciális tulajdonságait.

1.6. Tétel. *Álljon $M = (S, r)$ matroid a Q és P bázisok diszjunkt uniójából, ahol $c(Q) > c(P)$, Q c-egyedi és P minimális súlyú bázis. Ekkor van legalább r bázis, melyek súlya páronként különböző és kisebb mint $c(Q)$.*

Mayr és Plaxton [5] megfogalmazott egy sejtést, amelyből Kano három, még nem bizonyított sejtése következne. Jelölje $c(T)$ a T feszítő fa súlyát és T-t nevezzük *c-egyedinek*, ha T az egyetlen $c(T)$ súlyú feszítő fa G-ben.

1.7. Sejtés. *Legyen $G = (V, E)$ az éldiszjunkt T_1 és T_2 feszítő fák uniója, ahol $c(T_1) > c(T_2)$ és T_1 c-egyedi. Ekkor G-ben van legalább $n-1$ feszítő fa, melyek súlya páronként különböző és kisebb mint $c(T_1)$.*

A sejtés két speciális esetét vizsgálta Baumgart [1]. Belátta, hogy ha az 1.7. sejtésben szereplő gráf által meghatározott grafikus matroid úgynevezett strongly base orderable, akkor az állítás igaz. A 2. fejezetben megmutatjuk, hogy ez nemcsak grafikus matroidokra teljesül, hanem tetszőleges strongly base orderable matroid esetében igaz. Baumgart foglalkozott azzal az esettel is, amikor nemcsak T_1, hanem T_2 súlya is c-egyedi. A bizonyításban azonban hibát fedeztünk fel, ennek illusztrálására a 3. fejezetben adunk példát.

Kano sejtéseinek matroidokra való általánosítását elsőként Lemos [4] vizsgálta. Az 1.1. tétel következő általánosítását bizonyította.

1.8. Tétel. *Legyen $M = (S, r)$ matroid, c súlyfüggvény az elemeken, $\gamma \geq 2$ egész szám, $\mathcal{W}(M)$ jelölje a M-ben előforduló bázisok lehetséges súlyainak halmazát. Ekkor létezik $\lambda \leq 2$ egész szám, melyre teljesülnek az alábbiak:*

(i) Ha B minimális súlyú bázis M-ben, akkor minden k-ra és i-re, ahol $k = 1, \ldots |\mathcal{W}(M)|$ és $i = 1, \ldots k$ létezik B' bázis úgy, hogy $|B' - B| \leq \lambda(k-1)$ és B' i-edik minimális súlyú bázis.

(ii) Legyen B bázis, r és s egészek úgy, hogy $\{c(B') : B' \in \mathcal{B}, |B' - B| \leq \gamma r\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ és $c_1 < c_2 < \ldots < c_s$. Ha $c(B) = c_r$, akkor B r-edik minimális súlyú bázis M-ben.

(iii) Ha B k-adik minimális súlyú bázis M-ben, akkor minden i-re ahol $1 \leq i \leq k$ létezik B' bázis úgy, hogy $|B' - B| \leq \lambda(k-1)$ és B' i-edik minimális súlyú bázis

(iv) Álljon $\Gamma_k(M)$ gráf csúcshalmaza M k-adik minimális súlyú bázisaiból és BB' legyen él pontosan akkor, ha $|B - B'| \leq \gamma k$ és $B \neq B'$. Ekkor $\Gamma_k(M)$ összefüggő.

Lemos belátta, hogy az állítás első részében λ választható 1-nek, így Kano első sejtésének matroidokra való kiterjesztését kapta. Lemos következő tétele Mayr és Plaxton [5] gráfokra kimondott sejtésének általánosítása.

1.9. Tétel. *Legyen $M = (S, r)$ matroid, B k-adik minimális súlyú bázis és $k' \leq |\mathcal{W}(M)|$. Ekkor létezik B' k'-edik minimális súlyú bázis úgy, hogy $|B' - B| \leq k + k' - 2$.*

Mayr és Plaxton sejtése, hogy $f(k, k')$ választható $\max\{k, k'\} - 1$-nek is. Lemos vizsgálta Kano sejtéseit abban a speciális esetben is, amikor a bázisokat nem a súlyuk szerint rendezi, hanem a benne szereplő elemek súlyai alkotta vektor segítségével. Ha $x, y \in \mathbb{R}^m$, akkor x lexikografikusan kisebb y-nál, ha létezik $k \in [m]$, amelyre $x_i = y_i$ ha $i < k$ és $x_k > y_k$. Jelölje $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ a súlyozásban előforduló különböző értékeket és ha B bázis, akkor legyen a *súlyvektora* $\mathbf{v}(B) = (v_1(B), \ldots, v_m(B))$, ahol $v_i(B)$ jelöli a c_i súlyú elemek számát B-ben. A súly vektorok lexikografikus rendezésére Kano mind a négy sejtése igaz.

1.10. Tétel. *Legyen $M = (S, r)$ matroid, c súlyfüggvény az elemeken.*

(i) Ha B lexikografikus rendezés szerint minimális bázis M-ben, akkor létezik B' bázis úgy, hogy $|B' - B| \leq k - 1$ és B' i-edik lexikografikusan minimális bázis, minden $1 \leq i \leq k \leq |\mathcal{W}(M)|$.

(ii) Legyen B bázis, r és s egészek úgy, hogy $\{c(B') : B' \in \mathcal{B}, |B' - B| \leq r\} = \{z_1, z_2, \ldots, z_s\}$ és $z_1 < z_2 < \ldots < z_s$. Ha $c(B) = z_r$, akkor B r-edik lexikografikusan minimális bázis M-ben.

(iii) Ha B k-adik lexikografikusan minimális bázis M-ben, akkor minden i-re ahol $1 \leq i \leq k$ létezik B' bázis úgy, hogy $|B' - B| \leq k - 1$ és B' i-edik lexikografikusan minimális bázis.

(iv) Álljon $\Gamma_k(M)$ gráf csúcshalmaza M k-adik lexikografikusan minimális bázisaiból és BB' legyen él pontosan akkor, ha $|B - B'| \leq k$ és $B \neq B'$. Ekkor $\Gamma_k(M)$ összefüggő.

2. Strongly base orderable matroidok esete

Kano sejtéseinek matroidra való általánosításának először azt a speciális esetét néztük, amikor a matroid *strongly base orderable.*

2.1. Definíció. Egy $M = (S, r)$ matroidot strongly base orderable-nak nevezünk, ha bármely két B és B' bázisa között létezik $\varphi\colon B \to B'$ bijekció, melyre minden X részére B-nek $B - X + \varphi(X)$ is bázis.

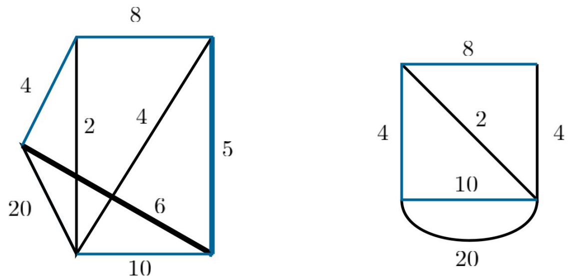
A definícióra építve bebizonyítottuk a következő tételt.

2.2. Tétel. *Adott $M = (S, r)$ strongly base orderable matroid és az elemein c súlyfüggvény. Tegyük fel, hogy M felbomlik B_1 és B_2 bázisokra úgy, hogy B_1 az egyetlen bázis $c(B_1)$ súllyal és $c(B_1) > c(B_2)$. Ekkor létezik $r(S)$ bázis úgy, hogy a súlyuk $c(B_1)$-nél kisebb és mind különböző.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi\colon B_1 \to B_2$ bijekció, ahol minden X részhalmazára B_1-nek $B_1 - X + \varphi(X)$ és $B_2 + X - \varphi(X)$ is bázis. Cseréljük ki az elemeket φ szerint, egyesével B_1 és B_2 között azokkal kezdve, melyekre $c(s) > c(\varphi(s))$. Ekkor teljesül, hogy az így előállított minden bázis súlya kisebb mint $c(B_1)$. Az állításhoz be kell látni, hogy mind különbözőek is. Indirekt tegyük fel, hogy a cserék során lesz két bázis, B' és B'', melyek súlya megegyezik, azaz $B' = B_1 - X + \varphi(X)$ és $B'' = B_1 - X + \varphi(X) - Y + \varphi(Y)$ valamely X és Y részhalmazokra. Ekkor $c(Y) = c(\varphi(Y))$ és $c(B_1) - c(Y) + c(\varphi(Y)) = c(B_1)$, ami ellentmond $c(B_1)$ egyediségének, így $r(S)$ különböző súlyú bázist kapunk, melyek súlya kisebb B_1 súlyánál. □

3. Ellenpélda

Baumgart [1] vizsgálta az 1.7. sejtésnek azt a speciális esetét, amikor T_1 és T_2 feszítő fa is c-egyedi a gráfban, amely ezek uniójából áll. A bizonyításban indukciót alkalmazott: tetszőlegesen választott olyan $t_1 \in T_1, t_2 \in T_2$ élpárt, melyek szimmetrikusan kicserélhetőek egymással, majd a súlyuktól függően az egyik élt összehúzta, a másikat törölte, és az így kapott gráfra, mely T_1' és T_2' feszítő fák uniója, alkalmazta az indukciós lépést. Ekkor t_i él összehúzása után T_i fa c-egyedi marad, azonban a bizonyítás során T_j egyediségére nem tér ki, és találtunk rá példát, hogy nem is feltétlenül marad c-egyedi. Ezek alapján az indukció ebben a formájában nem alkalmazható. Az 1. ábrán az első gráf legyen az összehúzás előtti gráf, ahol T_1 a fekete és T_2 a kék fa. Mindkét fa c-egyedi és $c(T_1) > c(T_2)$. Legyenek a vastaggal jelölt élek, azaz az 6 és 5 költségűek, amelyeket rendre összehúzunk és törlünk. Így keletkezik a második gráf. Azonban a kisebb gráfban T_2' már nem c-egyedi, ki lehet cserélni a 4 súlyú éleket és kapunk egy másik $c(T_2')$ súlyú fát.



1. ábra. A baloldali gráf megfelel a sejtés állításának, azonban a vastag élek összehúzása illetve törlése után a kékkel jelölt fa egyedisége sérül.

Általában, más nem stronly base orderable matroidok esetében is lehet találni hasonló ellenpéldát, például nagykörű matroidokra is adtunk egyet.

4. Bázisokra particionálás

Az 1.7. sejtés matroidos általánosításának egy erősebb változatát is elkezdtük vizsgálni a félév során.

4.1. Sejtés. *Adott $M = (S, r)$ matroid, mely felbomlik B_1 és B_2 bázisok uniójára, $c(B_1) > c(B_2)$ és B_1 c-egyedi. Ekkor a matroid felbomlik $(r(S) + 1)$-féleképpen két bázis uniójára úgy, hogy minden felbontásból kiválasztható egy B_1^i bázis, melynek súlya kisebb $c(B_1)$-nél és a kiválasztott bázisok súlya páronként különböző.*

A sejtésből következne Kano sejtése, de kell hozzá, hogy a feltételeknek megfelelő matroidnak van elég sok bázisokra való felbontása.

4.2. Állítás. *Ha $M = (S, r)$ matroid felbomlik két bázisra és $r(S) \geq 3$, akkor $(r(S)+1)$-féleképpen is felbomlik két bázisra.*

Bizonyítás. Legyen B_1 és B_2 a két bázis, amelyekre a matroid felbomlik és r jelölje $r(S)$-t. A szimmetrikus báziskicserélés szerint $x_i \in B_1$ elemhez létezik $y_i \in B_2$ úgy, hogy $B_1 - x_i + y_i$ és $B_2 + x_i - y_i$ is bázis, minden $i = 1 \dots r$-re, ahol x_i jelölje B_1 i-edik elemét egy tetszőleges sorrend szerint és y_i legyen a báziskicserélés szerinti párja.Különböző i, j indexekre az y_i és y_j elemek megegyezhetnek. Minden i-re a fenti $B_1 - x_i + y_i$ bázisok különbözőek lesznek egymástól és B_1-től is, mert x_i-ben eltérnek és nem egyeznek meg egy $B_2+x_j-y_j$ bázissal sem, mert az előbbiek legalább két B_2-beli elemet tartalmaznak, így (B_1, B_2) bázispárral együtt $r+1$ felbontást kapunk. □

A kicserélés után kapott bázisok különbözőségéhez kellett, hogy a rang legalább 3 legyen, $r = 1$-re vagy 2-re nem is marad igaz az állítás. Ha $r \geq 3$, akkor erősebb állítás is teljesül, Greene és Magnanti [2] tételét használva.

5. Matroidok kétféle súllyal

Vizsgáltuk az 1.7. sejtés matroidos változatának azon speciális esetét, amikor minden elem súlya egy kételemű halmazból kerül ki. Feltehető, hogy ez a halmaz a $\{0,1\}$, mert más esetben ekvivalens feladatot kapunk, ha a kisebbet 0-ra, a nagyobb súlyt 1-re állítjuk.

5.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy M matroid felbomlik Q és P bázisokra. Továbbá adott c súlyfüggvény úgy, hogy Q c-egyedi, $c(Q) > c(P)$, és minden x elemre $c(x) \in \{0,1\}$. Ekkor létezik rangnyi különböző, $c(Q)$-nál kisebb súlyú bázisa M-nek.*

Bizonyítás. Jelölje Q_i és P_i Q-ban és P-ben az i súlyú elemek halmazát ($i \in \{0,1\}$). Azt állítjuk, hogy $|Q_0| = |P_1|$. Ugyanis legyen $f : Q \to P$ bijekció olyan, hogy $\forall x \in Q : Q - x + f(x)$ bázis. Így minden $x \in Q_1$-re $f(x) \in P_0$ és $x \in Q_0$-re $f(x) \in P_1$, különben Q egyedisége sérülne. Továbbá minden P_1-beli y elem $C(Q,y)$ alapköre nem tartalmaz Q_1-beli elemet, különben be lehetne cserélni Q-ba úgy, hogy a bázis súlya ne változzon. P_0-belikre hasonlóan. Ebből következik, hogy a matroid $Q_0 \cup P_1$ és $Q_1 \cup P_0$-n lévő matroidok direkt összege. Ha egyik rész sem üres, akkor mindkettőben kicserélhető egy-egy elem, így kapnánk egy újabb $c(Q)$ súlyú bázist, tehát Q az összes 1 súlyú elemből áll, P pedig az összes 0 súlyúból. Ekkor P minimális súlyú, így alkalmazva az 1.6 tételt, az állítás teljesül. □

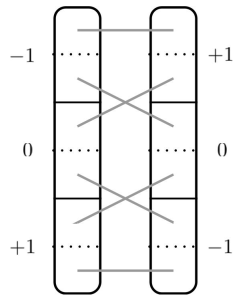
6. Matroidok háromféle súllyal

Ha háromféle elemsúly is lehet, akkor először azzal a speciális esettel foglalkoztunk, amikor a súlyok a $\{-1, 0, +1\}$ halmazból kerülnek ki.

Tekintsünk egy $f\colon Q \to P$ bijekciót, melyre $Q - x + f(x)$ bázis. Ekkor f hat részre particionálja a bázisokat az elemek súlya és a bijekcióbeli párjuk súlya szerint. Minden elemnek kétféle súlyból kerülhet ki a párja, vele megegyező súlyú nem lehet Q egyedisége miatt. Ezek alapján mindhárom, azonos súlyú elemek halmazát két részre bonthatjuk. A 2. ábra szemlélteti a partíciót.

A következő lemma segítségével és alapkörökkel kapcsolatos megfigyelésekkel leszűkítettük a lehetséges eseteket.

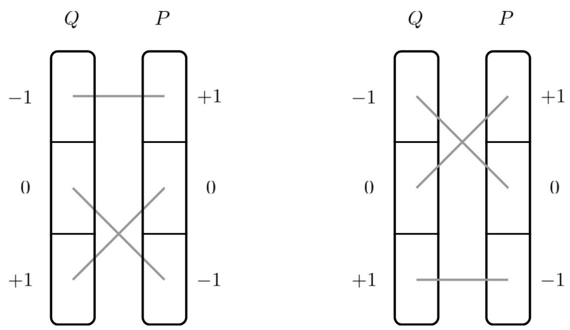
6.1. Lemma. *Legyen $M = (S, \mathcal{F})$ matroidnak I egy független részhalmaza. Legyenek $y_1, \ldots y_l \in S - I$ és $x_1, \ldots x_l \in I$ olyan elemek, amelyekre $x_i \in C(I, y_i)$ $(i = 1, \ldots l)$ és $x_i \notin C(I, y_j)$ $1 \leq j < i \leq l$. Ekkor $I - \{x_1, \ldots x_l\} + \{y_1, \ldots y_l\}$ független.*



2. ábra. A szürke élek jelölik, hogy az egyes osztályok f szerinti párja melyik halmazból kerül ki.

Legyen $y \in P$, ekkor $C(Q, y)$ nem tartalmazhat y súlyával megegyező súlyú Q-beli elemet Q egyedisége miatt. Azonban ha egy Q-beli -1 súlyú elemet kicserélünk egy $+1$ súlyúra, megengedett lesz $+1$ súlyút cserélni -1 súlyúra, de így újra $c(Q)$ súlyú bázist kapnánk, az említett halmazok közül (a 2. ábrán legalsó és legfelső) az egyik biztosan üres. Hasonlóan a $0, +1$ és $+1, 0$, illetve $-1, 0$ és $0, -1$ párokra. Ezek a megfigyelések összesen három párt határoznak meg a halmazok között, melyekből egymástól függetlenül az egyik halmaz mindig üres lesz.

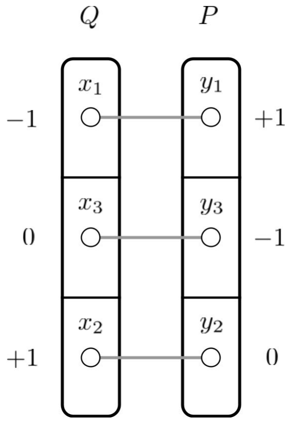
Az így kapott nyolc esetből az egyikben P minimális súlyú bázis, csak 0 és -1, míg Q $+1$ és 0 súlyú elemekből áll, így az 1.6. tétel miatt erre az esetre teljesül az állítás. Ennek a párja, amikor Q-ban 0 és -1, P-ben pedig $+1$ és 0 súlyú elemek szerepelnek. Ekkor Q súlya kisebb lenne, mint P súlya, így ez nem fordulhat elő. A 3. ábra mutatja a két esetet, amely nem létezhet, ahol Q és P is mindhárom különböző súlyból tartalmaz elemeket.



3. ábra. A két eset, amikor Q és P elemeinek súlya között mindhárom érték megjelenik.

6.2. Állítás. *Nem létezik olyan súlyozott matroid, amely felbomlik két bázis, Q és P uniójára úgy, hogy a súlyok a $\{-1, 0, +1\}$ halmazból kerülnek ki, Q c-egyedi, $c(P) < c(Q)$ és P és Q tartalmaz elemeket mindhárom súlyból.*

Bizonyítás. Először legyen f bijekció a 3. ábra első esete szerinti. Ekkor minden $y_1 \in P$, $+1$ súlyú elem $C(Q, y_1)$ alapköre nem tartalmaz $x_2 \in Q$, $+1$ súlyú elemet, különben



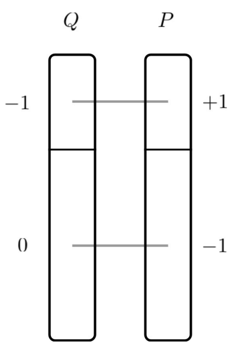
4. ábra. Az elemek kicserélésével $c(Q)$ súlyú bázist kapunk.

ezeket ki lehetne cserélni és Q nem lenne c-egyedi. Legyen $x_1 \in Q$ olyan -1 súlyú elem, amely rajta van y_1 alapkörén, $y_2 \in P$ súlya legyen 0 és $x_2 \in C(Q, y_2)$, ezeket a 4 ábra mutatja. A 6.1. lemma szerint $Q - \{x_1, x_2\} + \{y_1, y_2\}$ bázis. Ekkor két eset lehet.

Ha van olyan $x_3 \in Q$, $c(x_3) = 0$ elem, amelyre $x_3 \notin C(Q, y_1)$, akkor a 6.1. lemma szerint $Q' = Q - \{x_1, x_2, x_3\} + \{y_1, y_2, y_3\}$ is bázis, ahol $y_3 \in P$, $c(y_3) = -1$, például megfelelő y_3 lehet $f(x_3)$. A lemma feltételei teljesülnek, mert $x_3 \notin C(Q, y_2)$, mert mindkettő 0 súlyú elem, így nem cserélhetőek ki Q-ban. Azonban $c(Q') = c(Q)$, ami ellentondás, ezért y_1 alapköre tartalmaz minden Q-beli 0 súlyú elemet, legyen egy ilyen x_3. Továbbá legyen $x_2 \in Q$, $+1$ súlyú elem és $y_2 = f(x_2)$. Erre a négy elemre is alkalmazható a lemma, mert $x_2 \notin C(Q, y_1)$. Ekkor azt kapjuk, hogy $Q'' = Q - \{x_3, x_2\} + \{y_1, y_2\}$ bázis, de itt is teljesül, hogy $c(Q'') = c(Q)$, így nem létezhet a feltételeknek megfelelő matroid.

A 3. ábra másik esete is hasonló. □

A fenti bizonyításban használtuk, hogy minden partíció osztály nemüres, ezért megnéztük azokat az eseteket is, ahol csak kétféle súly szerepel, de a bijekcióban is csak kétféle eset van. Ezek közül az 5. ábrán látható esettel foglalkoztunk a legtöbbet, ahol Q -1 és 0, P $+1$ és -1 súlyú elemekből áll.



5. ábra. Eset, amikor kétféle súly szerepel a bázisokban.

Jelölje a Q-beli -1 súlyú elemek számát a és a 0 súlyúakét b, azaz $c(Q) = -a$, $c(P) = a - b$. A minimális súlyú bázis $-a - b = -r$ súlyú, ha a rangnyi darab -1 súlyú elem bázt alkot, különben ennél nagyobb. A sejtés szerint ha Q c-egyedi, akkor létezik r különböző, $-a$-nál kisebb, egész súlyú bázis, amelyek súlya nem kisebb, mint $-r$. Ha létezik ilyen matroid, az cáfolja a sejtést, ezért megnéztük a tulajdonságait.

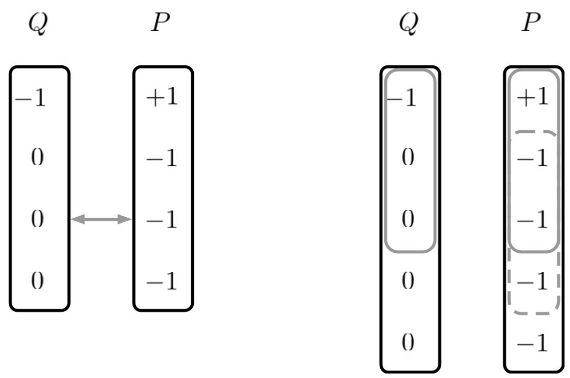
A feltételből, hogy $c(Q) > c(P)$ következik, hogy $b > 2a$, azaz $a < \frac{r}{3}$.

6.3. Állítás. *Minden $y \in P$ elem $C(Q, y)$ alapköre tartalmaz minden 0 súlyú Q-beli elemet vagy M két matroid direkt összege.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $y_3 \in P$, $+1$ súlyú elem úgy, hogy $x_2 \notin C(Q, y_3)$ és $c(x_2) = 0$. Legyen $y_2 = f(x_2)$ és $x_3 \in C(Q, y_3)$. Válasszunk egy $x_1 \in Q$ elemet, melynek súlya -1. Ekkor Q c-egyedisége miatt $x_1 \notin C(Q, y_2)$ és $x_1 \notin C(Q, y_3)$. A 6.1. lemmát alkalmazva $Q' = Q - \{x_1, x_2, x_3\} + \{y_1, y_2, y_3\}$ bázis és $c(Q') = c(Q)$, így minden P-beli elem alapköre tartalmazza Q 0 súlyú elemeit, azaz pontosan ezek alkotják az alapkört.

Az állítás második feléhez tegyük fel, hogy van egy $y_1 \in P$ elem, melyre $c(y_1) = +1$ és $x_2 \notin C(Q, y_1)$, $c(x_2) = 0$. Ha létezik $x_3 \in C(Q, y_1)$, melyre $c(x_3) = 0$, akkor $Q' = Q - x_3 + y_1$ is bázis és a súlya eggyel nagyobb $c(Q)$-nál. Ekkor $x_2 \notin C(Q, y_1)$ miatt $Q' - x_2 + f(x_2)$ is bázis, a cserével a súly eggyel csökken, így visszakapjuk Q súlyát, ami ellentmondás, így y_1 alapköre vagy tartalmaz minden 0 súlyú elemet, vagy egyiket sem és a matroid direkt összege a Q-beli -1 és P-beli $+1$, illetve a Q-beli 0 és P-beli -1 súlyú elemkből álló matroidoknak. □

Ha létezik matroid az előbbi feltételekkel, akkor az legalább 12 elemű, nem SBO és nem grafikus matroid. Legfeljebb 10 eleműekre a 6. ábra mutatja, hogy létezik olyan kicserélés, amely sértené Q c-egyediségét és grafikus matroid nem lehet az alapkörök speciális helyzete miatt.



6. ábra. Q nem lesz c-egyedi a négy és öt rangú esetekben, előbbinél a szimmetrikus kicserélés, utóbbinál a Greene-Magnanti tétel alkalmazható.

7. Konklúzió

A projekt célja az 1.7. sejtés matroidokra való általánosításának vizsgálata volt. Láttuk, hogy Mayr és Plaxton 1.5. tétele matroidokra is kimondható, azaz az 1.7. sejtés matroidos változata teljesül, ha a felbontásban a kisebb súlyú bázis, P, minimális súlyú.

A sejtést ezután a különböző súlyok száma szerint közelítettük meg. Két súly esetén vissza lehetett vezetni a feladatot az 1.6. tételre. Azonban három esetén már nehezebbnek bizonyult a feladat. Azzal a speciális súlyozással foglalkoztunk, amikor a súlyok a $\{-1, 0, +1\}$ halmazból kerülnek ki. Ekkor sok esetet kizártunk vagy visszavezettünk korábbira, de a redukció befejezése még nyitott.

Hivatkozások

[1] M. Baumgart. Partitioning bispanning graphs into spanning trees. 2008.

[2] C. Greene and T. L. Magnanti. Some abstract pivot algorithms. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 29(3):530–539, 1975.

[3] M. Kano. Maximum and k-th maximal spanning trees of a weighted graph. *Combinatorica*, 7(2):205–214, 1987.

[4] M. Lemos. Weight distribution of the bases of a matroid. *Graphs and Combinatorics*, 22(1):69–82, 2006.

[5] E. W. Mayr and C. G. Plaxton. On the spanning trees of weighted graphs. *Combinatorica*, 12(4):433–447, 1992.