

Kano három sejtésének egy általánosítása

Keszthelyi Szilvia

Témavezető:
Bérczi Kristóf
ELTE Matematikai Intézet,
Operációkutatási Tanszék

Sejtés (Kano)

Legyen $G = (V, E)$ gráf, $L_i(T)$ jelölje a T' feszítőfák halmazát, amelyekből T -be lehet jutni legfeljebb i élcserével.

- 1 Ha T minimális súlyú feszítőfa, akkor $L_{i-1}(T)$ tartalmaz egy i -edik minimális súlyú feszítőfát.
- 2 Ha T egy i -edik minimális súlyú feszítőfa $L_i(T)$ -ben, akkor G -ben is az.
- 3 Ha T egy i -edik minimális súlyú feszítőfa G -ben, akkor $L_{i-1}(T)$ -ben is i -edik minimális súlyú.
- 4 A következő $G(i, i)$ gráf összefüggő. A csúcshalmaz legyen az i -edik minimális súlyú feszítőfák halmaza és TT' él, ha i élcserével T -ből T' -be el lehet jutni.

Mayr és Plaxton bizonyította az első állítást, a másik három továbbra is nyitott.

Ebben a félévben a sejtés matroidos általánosításával foglalkoztunk.

Elnevezés

Legyen $M = (S, r)$ matroid, c súlyfüggvény az elemeken. Nevezzük B bázist c -egyedinek, ha nincs másik bázis $c(B)$ súllyal.

Mayr és Plaxton sejtéséből következne Kano három nyitott kérdése.

Sejtés

Álljon $M = (S, r)$ matroid P és Q bázisok uniójából úgy, hogy $c(P) < c(Q)$ és Q c -egyedi. Ekkor létezik r bázis, melyek súlya páronként különböző és kisebb mint $c(Q)$.

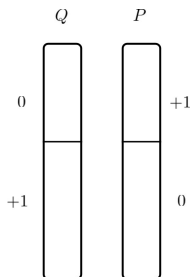
Mayr és Plaxton gráfokra bizonyította a következő állítást, azonban általánosan, matroidokra is igaz marad.

Tétel

Álljon $M = (S, r)$ matroid a Q és P bázisok diszjunkt uniójából, ahol $c(Q) > c(P)$, Q c -egyedi és P minimális súlyú bázis. Ekkor van legalább r bázis, melyek súlya páronként különböző és kisebb mint $c(Q)$.

Állítás

Tegyük fel, hogy M matroid felbomlik Q és P bázisokra. Továbbá adott c súlyfüggvény úgy, hogy Q c -egyedi, $c(Q) > c(P)$, és minden x elemre $c(x) \in \{0, 1\}$. Ekkor létezik rangnyi különböző, $c(Q)$ -nál kisebb súlyú bázisa M -nek.



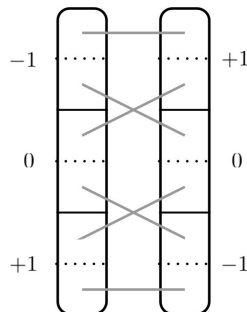
Matroidok háromféle súllyal

Speciális eset: $c: S \rightarrow \{-1, 0, +1\}$

Legyen $f: Q \rightarrow P$ bijekció, melyre $Q - x + f(x)$ bázis.

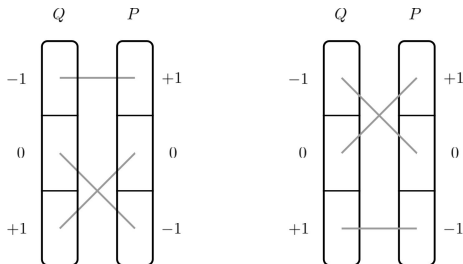
Bizonyos halmazpárok közül az egyik mindig üres lesz, így 8 esetre redukálódik a feladat.

Az esetek közül egy könnyű, három nem fordulhat elő.



Matroidok háromféle súllyal

Ha mindkét bázisban mindhárom súly szerepelne, akkor Q nem lenne c -egyedi.

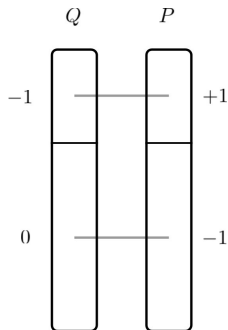


Matroidok háromféle súllyal

Ha az előző esetet módosítjuk úgy, hogy az egyik halmaz üres legyen, akkor kapunk egy jelöltet ellenpéldának a sejtésre.

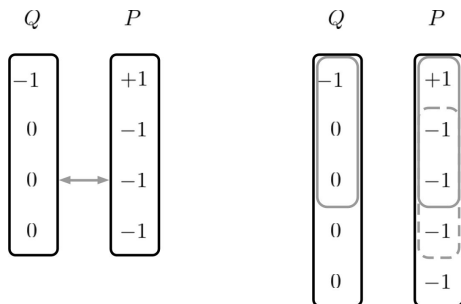
Itt nincs r különböző, $c(Q)$ -nál kisebb súlyú bázis.

Nyitott, hogy létezik-e olyan példa, ahol Q c -egyedi.



Matroidok háromféle súllyal

Az ellenpélda nem lehet 12-nél kevesebb elemű, grafikus matroid vagy SBO.



Első esetben $f: P \rightarrow Q$ bijekció, másodikban a Greene tétel mutatja, hogy Q nem c -egyedi.



M. Kano. *Maximum and k -th maximal spanning trees of a weighted graph.*
Combinatorica, 1987.



E. Mayr and G. Plaxton. *On the spanning trees of weighted graphs.*
Combinatorica, 1992.