

Kálmán-szűrő és alkalmazása

Önálló projekt II.
2020/21, 2. félév

Bakos Bence

Témavezető:
Lukács András

Az önálló projektem során egy vállalat munkája során felmerülő adatfeldolgozási kérdéseken dolgoztam. A cég evezősök számára készít teljesítménymérő eszközöket és szoftvert, amelyen keresztül a versenyzők nyomon követhetik a teljesítményüket. Az adatok az evező két végére szerelt szenzorokból származnak. A feladatom ezeknek az adatoknak a megértéséhez és megfelelő feldolgozásához kötődött.

A következő adatok állnak rendelkezésre mindkét oldali szenzorból:

- A szenzordoboz x , y és z tengelyének az észak-kelet-fel (É-K-F) tengelyektől való elfordulásának kvaternióval való megadása
- Ugyanennek az adatnak a szögekkel való megadása
- Gyorsulásadatok a szenzor x , y és z tengelyének aktuális irányába. Mértékegység: $mg = 1/1000g \approx 9.81/1000 m/s^2$
- A lapát síkjára merőleges (tehát a szenzor z tengelyének irányába ható) erőhatás minden időpillanatban. Nyúlásmérő bélyeggel mérik. Feltesszük, hogy a lapát középpontjában hat.

Ezekből a nyers adatokból szeretnénk a versenyzők és edzők számára használható és könnyen elemzhető adatokat gyártani. Ilyenek lehetnek például: sebesség, teljesítmény, csapáshossz stb. Néhány ilyen lehetséges kérdés az esetlegesen velük kapcsolatban felmerülő problémákat is megemlítve:

- Szenzor (lapát) sebességének (helyének) meghatározása. A sebesség fontos szerepet játszana később a teljesítmény kiszámolásában is. Kézenfekvő megközelítés lenne a diszkrét gyorsulásértékeket diszkrét integrálással összegezni, de ehhez szükségünk van egy v_0 kezdeti sebességre.

- Szenzor (lapát) aktuális állása (orientációja). A fix É-K-F tengelyekhez viszonyított állás a kvaternióadatokból számolható, bár azok igen zajosak. Nem tudjuk viszont például a hajó haladásához képest az „előre-jobbra-fel” tengelyek által meghatározott rendszerben.
- Csapáshosszok meghatározása. Ehhez a húzás kezdetének (evező vízbeérése) és végének meghatározása.
- Teljesítmény kiszámolása. Hosszabb szakaszokon átlagolva/húzásonként/pillanatnyi.
- Ezekon a konkrét kérdéseken kívül még az adatok zajszűrése is fontos feladat, mert a szenzorokból jövő jelek (főleg a gyorsulásértékek) igen zajosak.

A félév során ezek közül három kérdéssel foglalkoztam: a szenzor orientációjával, a sebesség becslésével és az ezekhez a feladatokhoz szükséges zajcsökkentéssel. Az alábbiakban ezeket ismertetem részletesebben.

Orientáció kvaterniókkal

A tengelyek orientációs adatai kvaterniókkal voltak megadva. Ezt azt jelenti, hogy minden időpillanathoz rendelkezésre állt egy $q_t = a_t + b_t i + c_t j + d_t k$ alakú kvaternió, amely a szenzordoboz x , y és z koordinátatengelyének az elfordulását határozta meg a fix abszolút koordinátarendszer "észak-kelet-fel" tengelyeihez képest. Tehát, ha ezeknek az irányoknak rendre az i , j , k tisztán képzetes kvaterniókat rendeljük hozzá, akkor a t időpillanatban a szenzor x tengelye a fix koordinátarendszerben az (α, β, γ) irányba áll, ahol $q_t i q_t^{-1} = \alpha i + \beta j + \gamma k$ (hasonlóan kapjuk az y és a z tengelyt). Ebben a formában könnyebben lehetett a későbbiekben térgeometriai számolásokat végezni az szenzor orientáció-adataival.

Sebességszámítás ötletek

A sebesség számítása sok szempontból hasznos lenne. Szükségünk van hozzá például a teljesítményszámoláshoz, amennyiben azt Fv formában számolnánk. (Ezt azonban meg lehet kerülni, ha például $\frac{\int F ds}{t}$ módon számolnánk, de ehhez a megtett útra kellene becslés, amihez szintén segíthet a sebesség közelítőleges ismerete.) Nehézség, hogy egy soktényezős környezetben nem ismerjük teljes mértékben az összes hatást így mindeképpen csak becslésekre tudunk törekedni.

A sebesség becslésére több ötlet is felmerült. Ahhoz, hogy a gyorsulásból integrálással meg tudjuk adni a sebességet szükségünk van egy időpillanatra, amikor tudjuk vagy meg tudjuk becsülni ezt az értéket. A legegyszerűbb a lapát egy nyugalmi (0 sebességű) pozícióját keresni. Mivel a szenzor tengelyinek irányába irányonként rendelkezünk a gyorsulásokkal így elég, ha minden irányba találunk tengelymenti 0 sebességű pozíciót.

Fontos, hogy a gyorsulásban megjelenik az is, hogy a hajó maga is gyorsul a versenyző egy húzásával. Szóval, ha a hajót tekintjük fixnek, akkor nem valósak a gyorsulásadataink. Ez problémákat okozhat az előbb említett sebességbecslési módszer esetében.

A végül kipróbált és implementált módszer egy másik irányú megközelítésből eredt, amely a szenzor orientációját használja. Feltételezzük, hogy a szenzor egy r sugarú gömbfelületen mozog (legalább a húzás során). Ez természetesen egy közelítés, de az eddigi mérések szerint értelmes eredményeket kapunk belőle. Ekkor tudjuk a megtett utat becsülni minden t és $t + 1$ időpillanat között, amiből könnyen jutunk a sebesség becsléséhez is: Legyen a szenzor lapát felé mutató y -tengelyének aktuális abszolút irányvektora y_t ($|y_t| = 1$). A szenzor t és $t + 1$ között megtett útja legyen s_t . Ekkor $s_t \approx \pi \cdot \arccos(\langle y_t, y_{t+1} \rangle)$.

Zajszűrés Kálmán-szűrővel

Az előbb leírt módszer egy könnyen számolható sebességbecslés, de egy igen pontatlan és nagyvonalú közelítést használunk a modellnél. A gyorsulásból kiinduló modellek esetén valós értékeket kapunk a mérésekből, de azok zajosak és csak a parthoz viszonyított abszolút koordinátarendszerben értelmezhetőek. Ezeknek a problémáknak az orvoslására alkalmaztuk a Kálmán-szűrőt.

Kálmán-szűrő leírás

A Kálmán-szűrő módszer eredeti változatát Rudolf E. Kalman dolgozta ki 1960-ban dinamikai rendszerek állapotának méréseken keresztül történő becslésére. Az algoritmus alapja, hogy a rendszer működéséről való előismeretek segítségével egy korábbi állapotból jóslni tudunk a következőre a rendszer dinamikája alapján, majd ezt összevetve a következő pillanatban vett mérési eredménnyel kapunk egy pontosabb becslést azt állapotra. Formálisan ez egy diszkrét idejű lineáris dinamikai rendszer esetén a következőt jelenti.

Legyenek $x_k \in \mathbb{R}^n$ a rendszer állapotvektorai a k -edik időpillanatban. Az alapfeltevésünk, hogy a rendszer működését a következő egyenlet határozza meg:

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k.$$

Itt F_k az átmeneti mátrix, B_k a kontroll mátrix, u_k pedig a kontroll vektor. w_k a folyamat zaj, melyről feltesszük, hogy $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$. A rendszer ezen leírása mellett rendelkezésünkre áll minden időpillanatban egy z_k mérés is az aktuális állapotról.

$$z_k = H_k x_k + v_k$$

Itt $v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$ a megfigyelési zaj.

A Kálmán-szűrő az aktuális becslésből a modell leírás alapján prediktálja a következő állapotot, majd ennek és a mérési eredménynek egy konvex kombinációjaként állítja elő az új becslést (az együtthatók a becslés és a mérés bizonytalansága alapján számolódnak és mindig a biztosabb forrás felé tendálnak).

Kálmán-szűrő részletek

Legyen adva \hat{x}_0 kezdeti becslés és P_0 (\hat{x}_0 kovariancia-mátrixa). Minden k időpillanatra jelölje $\hat{x}_{k|k-1}$ az ún. modell becslést,

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_k,$$

és a hozzátartozó kovarianciamátrix legyen $P_{k|k-1} = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k$. Legyen továbbá $y_k = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}$, amely a mérés és a modell által prediktált pozíció viszonyát tartalmazza. Ekkor a x_k -ra a következő módon kaphatunk egy \hat{x}_k becslést:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k y_k = (I - K_k H_k) \hat{x}_{k|k-1} + (K_k)(H_k x_k + v_k).$$

Az \hat{x}_k -hoz hozzátartozó kovarianciamátrix pedig $P_k = (I - K_k H_k) P_{k-1}$ lesz, ahol K_k az ún. *Kalman-gain*. Ez utóbbi mennyiséget jól megválasztva kaphatunk optimális szűrőt az alábbi értelemben.

Tétel. Az $\mathbb{E}[(\hat{x}_k - x_k)(\hat{x}_k - x_k)^T]$ várható értéket minimalizáló \hat{x}_k -t a $\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k y_k$ rekurzív kifejezés adja, ha $K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$.

Vegyük most H_k -kat egységmátrixoknak, azaz x_k -t mérjük közvetlenül. Ekkor $K_k = P_{k|k-1} (P_{k|k-1} + R_k)^{-1}$. Látható, hogy ha a mérési zaj kicsi, akkor a Kalman-gain közel lesz az identitásmátrixhoz. Tehát a Kálmán-szűrő nagyobb súllyal számítja be a mérést. Míg, ha R_k nagy, akkor inkább a modell becslést veszi figyelembe.

Kálmán-szűrő alkalmazása

Legyen a rendszer állapota a szenzor aktuális abszolút sebessége és iránya a 3 abszolút irányba:

$$d_t = (v_{1,t}, v_{2,t}, v_{3,t}, a_{1,t}, a_{2,t}, a_{3,t}) = (\mathbf{v}_t, \mathbf{a}_t),$$

A rendszert a következő képlettel írjuk le:

$$d_t = \begin{pmatrix} I & I \cdot \Delta t \\ 0 & I \end{pmatrix} d_{t-1} + G_t c_t = A_t d_{t-1} + G_t c_t,$$

ahol I a 3x3-as egységmátrix, Δt pedig két időpillanat között eltelt idő. Tehát $A_t d_{t-1}$ alapján a sebesség a mért gyorsulás alapján változik a következő pillanatig és ehhez adódik még hozzá egy ismeretlen tényező $G_t c_t$ (a modell zaj). c_t a gyorsulásváltozás vektor, tehát $c_t = (0, 0, 0, c_{t,1}, c_{t,2}, c_{t,3})$. G_t hasonlóan A_t -hez, c_t hatását írja le d_t -re a Newton-törvények alapján.

A mérés: $z_t = H d_t + v_t$, ahol $H = I$ lesz (magát sebességet és a gyorsulást is mérjük). A gyorsulásra mért értékek azok, amiket a műszerből kapunk. Ez valószínűleg normális eloszlású zaj, de sajnos abszolút gyorsulást mér. A sebességre a mérések a gömbíves útbecslésből jönnek. Ez már tényleg a versenyzőhöz mért sebességet nézi, de nem egyértelmű, hogy a zaj normális eloszlású. (Ezt egyelőre feltételeztük, de a későbbiekben érdemes lesz ilyen típusú általánosításokat is megnézni.)

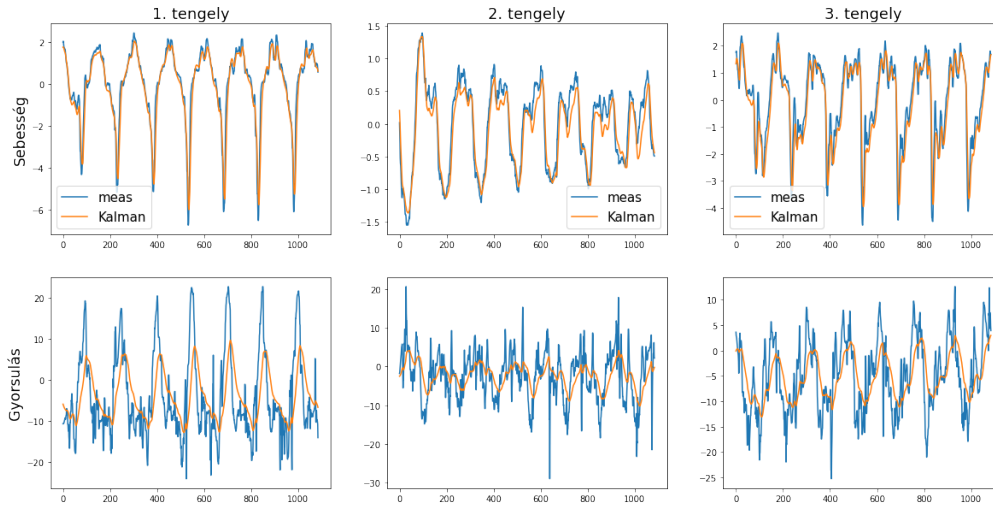
A v_t és c_t zajok kovarianciamátrixát diagonálisnak tekintjük a következő alakban:

$$Cov(v_t) = \begin{pmatrix} \sigma_v^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 I \end{pmatrix} \quad Cov(c_t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ac}^2 I \end{pmatrix}.$$

Itt I a 3×3 -as egységmátrix, σ_v , σ_a és σ_{ac} pedig a sebesség, a gyorsulás és a gyorsulásváltozás szórását becslő paraméterek melyek értékére a tapasztalati szórásokból kaptunk segítséget. (Így $Q_t = Cov(v_t)$ és $R_t = G_t Cov(c_t) G_t^T$ lesz.)

Eredmények, továbbiak

A nyers adatokon a fenti módon lefuttatott Kálmán-szűrő hatása az ábrán látható a sárga görbéken. A kék görbék az adott értékek egy már szűrt (medián szűrő 2 sugárral) verzióját ábrázolják.



A projekt folytatására három fő irány alakult ki. Egyik a fent bemutatott sebességmodell működésének ellenőrzése (edzésvideóval való összevetése) és lehetséges javítások eszközölése. Ha szükséges, akkor általánosabb Kálmán-szűrő modelleket is ki lehet próbálni (Extended Kalman filter, Unscented Kalman filter). A másik irány, ehhez kapcsolódva, a teljesítményszámolás akár az eddigi eredmények segítségével, akár egy új modellel. A harmadik irány inkább programozástechnikai feladat, amiben egy animációt kellene készíteni a lapát mozgásáról az evezés során. Ez az edzésekről készült videókkal való összehasonlítással az adatok és az eddigi eredmények ellenőrzésére is lehetőséget teremtene.

Bibliography

- [1] Nicholas Assimakis, Maria Adam, and Anargyros Douladiris. Information filter and kalman filter comparison: Selection of the faster filter. In *Information Engineering*, volume 2, pages 1–5, 2012.
- [2] Simon J Julier and Jeffrey K Uhlmann. New extension of the kalman filter to nonlinear systems. In *Signal processing, sensor fusion, and target recognition VI*, volume 3068, pages 182–193. International Society for Optics and Photonics, 1997.
- [3] Edgar Kraft. A quaternion-based unscented kalman filter for orientation tracking. In *Proceedings of the Sixth International Conference of Information Fusion*, volume 1, pages 47–54. IEEE Cairns, Queensland, Australia, 2003.
- [4] Hamed Masnadi-Shirazi, Alireza Masnadi-Shirazi, and Mohammad-Amir Dastgheib. A step by step mathematical derivation and tutorial on kalman filters. *arXiv preprint arXiv:1910.03558*, 2019.
- [5] Wikipedia contributors. Kalman filter — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kalman_filter&oldid=1020055616, 2021. [Online; accessed 3-May-2021].
- [6] Wikipedia contributors. Quaternions and spatial rotation — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quaternions_and_spatial_rotation&oldid=1019578836, 2021. [Online; accessed 3-May-2021].