Önálló projekt II.
Beszámoló

Gehér Panna

Euklideszi Ramsey elmélet

Témavezető: Tóth Géza

BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék

2020-2021. II. félév

1. Bevezetés

Az Ramsey elmélet egyik, főleg geometriai vonatkozású kérdésekkel foglalkozó részterülete az Euklideszi Ramsey elmélet. Tipikus esetben az euklideszi sík, vagy magasabb dimenziós tér pontjait színezzük és egyszínű konfigurációkat keresünk. Az 1970-es években Erdős és társai háromrészes cikksorozatot [14] [15] [16] adtak ki, ezzel elindítva a szisztematikus vizsgálatokat. A témakör egyik leghíresebb nyitott kérdése az 1950-es években megfogalmazott Hadwiger–Nelson probléma: Mennyi a sík kromatikus száma, azaz legkevesebb hány színnel lehet kiszínezni a sík pontjait úgy, hogy ne legyen két egyszínű pont egységtávolságra? A pontos érték meghatározása meglehetősen nehéz feladatnak bizonyul. Egyszerű példák mutatják, hogy hét szín elég (Isbell), de három szín nem (Moser). Ezen eredmények szinte a feladat megjelenésével egyidőben születtek, mégis sokáig nem sikerült javítani rajtuk. Így nagy visszhangot keltett, mikor 2018-ban de Grey [25] igazolta, 4 szín sem elég. Nem sokkal később Exoo és Ismailescu [18] újabb bizonyítást publikáltak. Így az ismert korlátok: $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. A cikkek megjelenését követően a témakör újra nagyobb figyelemben részesült, így több új eredmény is született az elmúlt néhány évben. A feladatot számtalan különböző módon általánosíthatjuk. Érdekes kérdésekhez jutunk, ha például az egyes színosztályokban különböző konfigurációkat keresünk, vagy éppen egybevágóság helyett más transzformációkat tekintünk. Az egyik legtöbbet vizsgált probléma a feladat magasabb dimenziós általánosítása. Először Frankl és Wilson [22] bizonyították $\chi(\mathbb{R}^n)$ exponenciális növekedését. Az eddig ismert legjobb korlátok:

$$\big(1.239\ldots + o(1)\big)^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq \big(3 + o(1)\big)^n$$

Az alsó korlát Raigorodskii [36], a felső Larman és Rogers [32], illetve Prosanov [34] eredménye.

Az előző félévben Csizmadia és Tóth [10] tételén keresztül a Hadwiger-Nelson problémának egy aszimmetrikus változatával ismerkedtem meg. Ebben a félévben elsősorban azt vizsgáltam, hogy a feladat hogyan általánosítható Minkowski terekre, nagyobb hangsúlyt fektetve a síkbeli esetekre. Továbbá áttekintettem az Euklideszi Ramsey elméletet meghatározó, úgynevezett Ramsey halmazok ismert tulajdonságait, illetve a témakör legfontosabb kérdéseit. Feladatom annak tisztázása volt, hogy a Ramsey halmaz fogalmát miként lehet Minkowski terekben jól definiálni.

2. Ramsey halmazok

Az Euklideszi Ramsey elméletben meghatározó szerepet játszik a következő fogalom, melyet Erdősék vezettek be cikksorozatukban:

2.1. Definíció (Ramsey). *Egy $X \subset \mathbb{R}^n$ véges halmazt Ramseynek nevezünk, ha minden $r \geq 2$ egészre létezik $n_0 = n_0(X, r)$, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $\mathbb{R}^n$ minden r-színezésében található X-el egybevágó egyszínű halmaz.*

A legegyszerűbb nem triviális példa Ramsey halmazra egy egységtávolságra lévő pontpárból álló halmaz. Válasszuk n_0-at r-nek. Mivel $\mathbb{R}^r$ minden r-színezésében az $(r+1)$ pontból álló szabályos szimplex legalább két pontja azonos színű, a halmaz valóban Ramsey. Hasonló meggondolás alapján minden szabályos szimplex Ramsey. A Ramsey halmazok fontos tulajdonságát írja le a Szorzás-tétel:

2.1. Tétel (Szorzás-tétel)**.** *Legyenek $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ és $K_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ Ramsey halmazok.*
Ekkor $K_1 \times K_2 := \{(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m) \mid (x_1, \dots x_n) \in K_1, (y_1, \dots y_m) \in K_2\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ is Ramsey.

2.1. Következmény. *Minden tégla Ramsey.*

Egy Ramsey halmaz minden részhalmaza is Ramsey, így ha X egy tégla részhalmaza, akkor X is Ramsey. Ebből azonnal következik, hogy például a derékszögű háromszögek Ramsey halmazok, hiszen egyetlen pont hozzávételével kiegészíthetőek téglalappá. Kérdés, milyen halmazokra igaz még, hogy pontjaik egy téglatest csúcsainak részhalmazát alkotják. Álljon $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n+1)$ általános helyzetű pontból. Ahhoz, hogy X pontjai kiegészíthetőek legyenek egy tégla csúcshalmazává, egy szükséges feltétel, hogy X semelyik 3 pontja se határozzon meg derékszögnél nagyobb szöget. Ez a feltétel $n \le 3$ esetben elégségesnek is bizonyul, így minden hegyesszögű háromszög Ramsey. Mi a helyzet a tompaszögű háromszögekkel? A kérdést Frankl és Rödl válaszolták meg:

2.2. Tétel (Frankl-Rödl [20])**.** *Minden háromszög Ramsey.*

Bizonyításuk 3 lépésből áll. Először a Ramsey-tétel [38] segítségével a $\sqrt{2t}$, $\sqrt{2t}$, $\sqrt{8t-6}$ oldalú háromszögekről mutatták meg, hogy Ramsey halmazok. Megfigyelhető, hogy ahogy t tart végtelenhez, úgy a két rövidebb oldal által bezárt szög 180°-hoz tart. A 2. lépésben megmutatták, hogy egy egyenlőszárú háromszög beágyazható egy $\sqrt{2t}$, $\sqrt{2t}$, $\sqrt{8t-6}$ oldalú háromszög és egy megfelelő hosszú intervallum szorzataként előálló hasábba. Így a 2.1. Szorzás-tétel alapján minden egyenlőszárú háromszög Ramsey. A 3. lépésben hasonló, kicsit trükkösebb konstrukcióval igazolták, hogy minden háromszög Ramsey.

Nagyobb elemszámú Ramsey halmazokra csak kevés példa ismert. Kříž [29] tétele alapján minden szabályos sokszög, például a szabályos ötszög is Ramsey.
A Ramsey halmaz definíciójában szereplő feltételeket tovább erősíthetjük:

2.2. Definíció (Exponenciálisan Ramsey)**.** *Egy $X \subset \mathbb{R}^n$ halmaz exponenciálisan Ramsey, ha létezik $\epsilon = \epsilon(X) > 0$, hogy $m \ge n$ és $r < (\epsilon+1)^m$ esetén $\mathbb{R}^m$ minden r-színezésében található X-el egybevágó egyszínű halmaz.*

A Frankl-Wilson [22] tétel alapján – miszerint $\chi(\mathbb{R}^n)$ exponenciálisan növekszik – a kétpontú halmazok teljesítik ezen feltételeket is. Frankl és Rödl [21] a 2.2. tételt általánosítva megmutatták, hogy minden szimplex exponenciálisan Ramsey. Sőt, egyelőre nem ismert olyan halmaz, ami Ramsey, de nem exponenciálisan Ramsey. Így az is lehetséges, hogy a két definíció egybeesik.

A legegyszerűbb példa nem Ramsey halmazra az $(1,1,2)$ oldalú elfajuló háromszög. Egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont színe legyen $\lfloor x^2 \rfloor$ modulo 4. A paralelogramma szabályt alkalmazva ellenőrizhető, hogy a színezés megfelelő. A fenti gömbhéjas színezés általánosításával Erdősék megmutatták, hogy ha egy konfiguráció nem gömbi, azaz pontjai nem egy gömb felszínén helyezkednek el, akkor nem Ramsey. A témakör egyik legismertebb sejtése szerint ennek fordítottja is igaz:

2.1. Sejtés (Graham, [24])**.** *Egy véges halmaz pontosan akkor Ramsey, ha pontjai egy gömb felszínén helyezkednek el.*

A kérdés több mint 30 éve nyitva áll, ráadásul egy másik, rivális sejtés is megjelent.

2.3. Definíció (Tranzitív)**.** *Egy X konfigurációt tranzitívnak nevezünk, ha minden u,v pontpárra létezik egy $\varphi : X \to X$ izometria, melyre $\varphi(u) = v$.*

Megfigyelhető, hogy a fent említett Ramsey halmazok mind beágyazhatóak tranzitív halmazba. Sőt, a bizonyítások fontos lépése az effajta beágyazás. Ezen észrevétel motiválja az alábbi sejtést:

2.2. Sejtés (Leader és társai [33])**.** *Egy halmaz pontosan akkor Ramsey, ha tranzitív, vagy tranzitív halmaz részhalmaza.*

Leader és társai megmutatták, létezik olyan halmaz, ami gömbi, de nem egészíthető ki tranzitív halmazzá. Így a két sejtés valóban különbözik egymástól.

Erősen Ramsey halmazok

A továbbiakban azt vizsgáljuk, miképp lehet metrikus terekre általánosítani a Ramsey halmaz fogalmát. Néhány fontos definíció következik:

2.4. Definíció (Metrikus tér)**.** *Legyen X halmaz, $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ 2 változójában szimmetrikus függvény, melyre az alábbiak teljesülnek:*

- *$d(x,y) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $x = y$*
- *minden $x,y,z \in X$-re: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$*

Ekkor az (X,d) párt metrikus térnek nevezzük. Ha X véges, akkor véges metrikus térről beszélünk.

2.5. Definíció (Normált tér)**.** *Legyen X halmaz, $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$, melyre az alábbiak teljesülnek:*

- *$\|x\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $x = 0$*
- *minden $x \in X$-re és α számra $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$*
- *minden $x,y,z \in X$-re: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$*

Ekkor az $(X,\|.\|)$ párt normált térnek nevezzük.

Adott normacsalád esetén szinte változtatás nélkül használhatjuk a Ramsey halmaz definícióját. A legismertebb normacsaládok az úgynevezett l_p normák:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} & \text{ha } p \in [1,\infty) \\ \max\{|x_i| \mid i = 1 \dots n\} & \text{ha } p = \infty \end{cases}$$

2.6. Definíció (l_p–Ramsey)**.** *Azt mondjuk, hogy egy X véges metrikus tér l_p–Ramsey, ha minden $r \geq 1$ egészre létezik $n_0 = n_0(X,r)$, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $\mathbb{R}^n$ minden r-színezésében található X-el izometrikus egyszínű halmaz.*

Fontos megjegyezni, hogy az $r = 1$ eset egybeesik azzal a kérdéssel, hogy X beágyazható-e az adott normált térbe. A Ramsey halmaz definíciójában feltettük, hogy kizárólag az Euklideszi térbe beágyazható halmazok körében dolgozunk, így itt említésre sem került az $r = 1$ eset.

Legyen X tetszőleges halmaz, $r > 1$ rögzített. A kompaktsági lemma segítségével megmutatható, hogy ha $\mathbb{R}^n$ minden r-színezésében található X-el egybevágó egyszínű halmaz, akkor ez már $\mathbb{R}^n$-nek egy véges részhalmazára is teljesül. Vagyis, ha X Ramsey, akkor minden r színszámhoz tartozik egy véges tanúhalmaz. Ha valamely p-re a tanúhalmazok – mint véges metrikus terek – izometrikusan beágyazhatóak az l_p térbe, akkor X l_p–Ramsey.
Egyszerű megfigyelés, hogy minden metrikus tér beágyazható az l_∞ térbe:

2.3. Állítás. *Legyen X tetszőleges véges metrikus tér. Ekkor X beágyazható az l_∞ térbe.*

Bizonyítás. Legyen $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ véges metrikus tér. Az $f : X \to l_\infty$ minden $x \in X$ ponthoz rendelje hozzá azt az n hosszú vektort, melynek i. koordinátája az x és x_i pontok $d(x, x_i)$ távolságával egyezik meg. Ekkor f egy izometrikus beágyazását adja X-nek az l_∞ térbe:
Egyrészt minden x_i, $x_j \in X$-re $\left\|f(x_i) - f(x_j)\right\|_\infty \geq d(x_i, x_j)$, hiszen:

$$\left\|f(x_i) - f(x_j)\right\|_\infty = \max_k |f_k(x_i) - f_(x_j)| \geq |f_i(x_i) - f_i(x_j)| = d(x_i, x_j)$$

Másrészt a háromszög-egyenlőtlenségből adódóan minden k-ra:

$$|f_k(x_i) - f_k(x_j)| = |d(x_i, x_k) - d(x_k, x_j)| \leq d(x_i, x_j)$$

Ezzel pedig beláttuk az állítást. □

Vagyis az előzőek alapján ha X l_2–Ramsey, akkor l_∞–Ramsey is. Nemrég Kupavskii ennél lényegesen többet bizonyított:

2.4. Tétel (Kupavskii [31])**.** *Minden véges metrikus tér exponenciálisan l_∞–Ramsey.*

Tetszőleges normákra nézve viszont nem egyértelmű, hogy lehet jól általánosítani a Ramsey halmaz fogalmát. Továbbiakban a vizsgálatainkat Minkowski terekre szűkítjük.

2.7. Definíció (Minkowski tér)**.** *Legyen C egy n-dimenziós origóra középpontosan szimmetrikus konvex test. Egy $x \in \mathbb{R}^n$ pont C által meghatározott $\|x\|_C$ normája* $\min\{\lambda \in \mathbb{R}^+ | x \in \lambda C\}$. *Ekkor az $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ teret Minkowski térnek nevezzük.*

Ebben az esetben egy lehetséges meghatározás a következő:

2.8. Definíció (Erősen Ramsey)**.** *Egy X véges metrikus térre azt mondjuk, hogy erősen Ramsey, ha bármely $r \geq 1$ egész esetén létezik egy n_0 egész, hogy minden $n \geq n_0$ dimenziószám és $C \subset \mathbb{R}^n$ szimmetrikus konvex test által meghatározott Minkowski tér esetén $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ minden r-színezésében van X-el izometrikus egyszínű halmaz.*

Definíció alapján, ha X nem ágyazható be valamelyik Minkowski térbe, akkor nem lehet erősen Ramsey. Másrészt, ha X beágyazható az euklideszi térbe, és nem Ramsey, akkor sem erősen Ramsey. Így az euklideszi értelemben nem gömbi halmazok nem erősen Ramsey halmazok.

Kérdés, hogy milyen halmazok teljesítik a fenti feltételeket, milyen tulajdonságaik vannak az erősen Ramsey halmazoknak.

Legyen X két egységtávolságú pontból álló halmaz. Megmutatjuk, hogy X erősen Ramsey. Meglepő módon már ennek az egyszerű állításnak is kifejezetten nehéz a bizonyítása. Legyen S egy $(r+1)$ csúcsú szabályos szimplex, azaz egy $(r+1)$ pontú halmaz, melynek pontjai páronként 1-1 távolságot határoznak meg. S pontjait r színnel színezve legalább az egyik színosztály 2 csúcsát is tartalmazza. Így elég belátni, hogy minden $r \geq 1$ számra létezik olyan n dimenziószám, hogy minden n-dimenziós Minkowski tér tartalmaz $(r+1)$ csúcsú szabályos szimplexet.

Legyen X normált tér és jelölje $e(X)$ az X-ben található páronként egységtávolságra lévő pontok maximális számát. Euklideszi esetben tudjuk, hogy $e(\mathbb{R}^n) = n+1$, azonban tetszőleges X normált tér esetén $e(X)$ meghatározása nehéz feladatnak bizonyul. Síkban ismert, hogy $3 \leq e(X) \leq 4$, és $e(X)$ pontosan akkor 4, ha X egységgömbje paralelogramma. Nyitott kérdés, hogy igaz-e a fenti korlát magasabb dimenziós általánosítása:

2.3. Sejtés. *Egy n-dimenziós X normált tér esetén $e(X) \geq n+1$.*

A sejtést több speciális esetben igazolták. Egy normált teret permutáció-invariánsnak nevezünk, ha minden $\sigma : \{1, \dots n\} \to \{1, \dots n\}$ permutációra $\|(x_1, \dots x_n)\| = \|(x_{\sigma(1)}, \dots x_{\sigma(n)})\|$. Egy permutáció-invariáns normált tér esetén az n standard egységvektor páronként egyenlő, $\|(1, -1, 0, \dots 0)\|$ távolságra vannak egymástól, így $e(X) \geq n$. Sőt, kis meggondolás alapján az egységvektorok kiegészíthetőek $(n+1)$ pontú szabályos szimplexé (Kobos [27]). Egy másik speciális eset, ha az X normált tér közel-euklideszi. A tétel kimondásához szükséges az alábbi fogalom:

2.9. Definíció (Banach-Mazur távolság)**.** *Legyenek K, $L \subset \mathbb{R}^n$ szimmetrikus konvex testek. Azt a legkisebb $\lambda \geq 0$ számot, melyre létezik egy $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris nemelfajuló transzformáció, hogy $T(K) \subseteq L \subseteq \lambda T(K)$ teljesül, a K és L Banach-Mazur távolságának nevezzük, és $d(K, L)$-el jelöljük.*

A Banach-Mazur távolság legfontosabb tulajdonságai a következők:

Legyenek $K, L, M \subseteq \mathbb{R}^n$ szimmetrikus konvex testek. Ekkor:

- $d(K,L) \leq 1$
- $d(K,L) = 1$ pontosan akkor teljesül, ha K és L egymás affin képei
- $d(K,L) = d(L,K)$
- $d(K,M) \leq d(M,L) \cdot d(L,K)$

Tehát $d(.,.)$ az n-dimenziós szimmetrikus konvex testek affin ekvivalenciaosztályain multiplikatív metrikát határoz meg, azaz logaritmusa egy metrika. Legyen X és Y n-dimenziós normált tér. Ekkor $d(X,Y)$ az X és Y egységgömbjeinek Banach-Mazur távolságát jelöli.

Vagy ezzel ekvivalensen: $d(X,Y) := \inf\{\ \|T\| \cdot \|T^{-1}\|\}$, ahol $T : X \to Y$ lineáris, invertálható leképezés.

2.5. Tétel (Brass [4], Dekster [11])**.** *Legyen X egy n-dimenziós normált tér, melyre $d(X, l_2^n) \leq 1 + 1/n$. Ekkor bármely n pontú szabályos szimplex kiegészíthető $(n+1)$ pontúvá. Így $e(X) \geq n+1$.*

Általános esetben az előző tételt felhasználva, a Dvoretzky tétel segítségével adhatunk alsó korlátot $e(X)$ értékére.

2.6. Tétel (Dvoretzky [13])**.** *Létezik $c > 0$ konstans, hogy minden $\epsilon > 0$-ra és $n \geq exp(cm\epsilon^{-2})$-ra egy n-dimenziós Minkowski térnek létezik m-dimenziós Y altere, melyre $d(Y, l_2) \leq 1 + \epsilon$.*

Az ϵ értékét $1/(m+1)$-nek választva a fenti két tételt összevetve létezik $c > 0$ konstans, hogy $e(X) \geq c\sqrt[3]{\log(n)}$. Ezen a korláton javított Swanepoel és Villa. Bizonyításuk fő ötlete, hogy a Dvoretzky tétel egy általánosítását, Alon és Milman tételét alkalmazták:

2.7. Tétel (Alon-Milman [1])**.** *Legyen X egy tetszőleges n-dimenziós normált tér. Minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $c \in (0,1)$ konstans, hogy X-nek létezik egy $m \geq exp(c\sqrt{\log n})$ dimenziós Y altere, melyre vagy $d(Y, l_2) \leq 1 + \epsilon$, vagy $d(Y, l_\infty) \leq 1 + \epsilon$ teljesül.*

Megmutatták, hogy ha $d(X, l_\infty) \leq 3/2$, akkor $e(X) \geq n+1$. Így az előzőek alapján:

2.8. Tétel (Swanepoel-Villa [44])**.** *Legyen X egy tetszőleges normált tér. Ekkor $e(X) \geq exp(c\sqrt{\log n})$, ahol $c > 0$ konstans.*

Tehát $n_0 = \exp((c \cdot \ln(2r+1))^2)$ választása mellett $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ tartalmaz $(r+1)$ csúcsú szabályos szimplexet. Így valóban minden 2 pontú halmaz erősen Ramsey.

A következő felmerülő kérdés, hogy a 2.2. Frankl-Rödl tétel általánosítható-e, azaz igaz-e, hogy minden háromszög erősen Ramsey. Az előző esethez hasonlóan minden r színszámhoz létezik egy n dimenziószám, hogy az n-dimenziós tér tartalmaz $(2r+1)$ pontú szimplexet, így a szabályos háromszögek erősen Ramsey halmazok. Általános háromszög esetén azonban egyelőre nem sikerült megmutatni, hogy valóban erősen Ramsey halmazok lennének. A Frankl-Rödl tétel alapján adott háromszöghöz minden színszám esetén meghatározhatunk egy véges tanúhalmazt. Ha ezek beágyazhatóak az adott térbe, például a 2.6. Dvoretzky-tétel által biztosított közel-euklideszi alterébe, akkor készen lennénk.

Egy másik lehetséges út a Frankl-Rödl tétel módosítása: a bizonyítás elejét követve minden p-re a $\sqrt[p]{2t}$, $\sqrt[p]{2t}$, $\sqrt[p]{2^{p+1}(t-1)+2}$ oldalú háromszögek l_p−Ramsey halmazok. A további lépések azonban a 2.1. Szorzás-tétel hiányában nem vihetők át, a kérdés továbbra is nyitva áll.

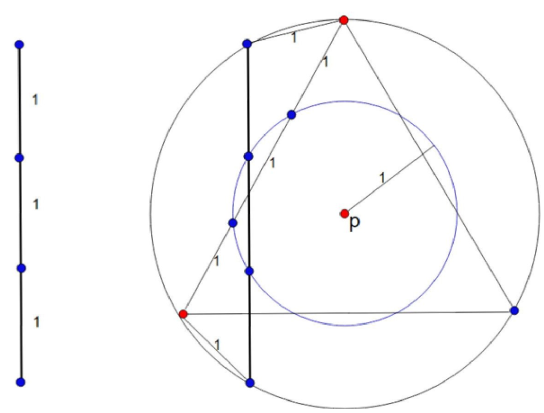
3. Aszimmetrikus Ramsey halmazok

Legyen K_1, K_2 olyan konfiguráció, hogy $\mathbb{R}^n$ minden piros-kék színezésében van vagy K_1-el egybevágó piros, vagy K_2-vel egybevágó kék konfiguráció. Ekkor azt mondjuk, hogy a K_1-K_2 pár aszimmetrikusan Ramsey $\mathbb{R}^n$-ben, ezt $\mathbb{R}^n \to (K_1, K_2)$ -el jelöljük. Ellenkező esetben az $\mathbb{R}^n \not\to (K_1, K_2)$ jelölést használjuk.

Az egyik legtöbbet vizsgált eset, amikor mindkét konfigurációról feltesszük, hogy pontjaik egy egyenesre esnek. Jelölje l_m az m egymást 1-1 távolságra követő kollineáris pontokból álló halmazt.

3.1. Tétel (Erdős és társai [15]). *A sík minden piros-kék színezése vagy tartalmaz l_2-vel egybevágó piros, vagy l_4-el egybevágó kék konfigurációt. Azaz $\mathbb{R}^n \to (l_2, l_4)$ fennáll.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy létezik egy p piros pont. Ekkor a p pont körüli 1 sugarú kör minden pontja kék. Tekintsünk egy $\sqrt{3}$ sugarú koncentrikus kört.



A $\sqrt{3}$ sugarú körbe írt szabályos háromszög segítségével esetszétválasztással ellenőrizhető, létezik egy olyan egyenes, amelynek a körökkel vett metszete kék l_4-et eredményez. □

Az elmúlt néhány évben több eredmény is született a feladattal kapcsolatban. Tsaturian [46] megmutatta, hogy síkban (l_2,l_5), térben pedig Arman és Tsaturian igazolták [2], hogy (l_2,l_6) aszimmetrikus Ramsey párok. Conlon és Fox [8] megmutatták, hogy létezik egy c konstans, melyre minden $m \geq 2^{cn}$

esetén megadható $\mathbb{R}^n$-nek egy olyan 2-színezése, ami nem tartalmaz sem egyszínű l_2, sem egyszínű l_m konfigurációt. Később látjuk, hogy ez c konstanstól eltekintve optimális.

A továbbiakban az egyik konfigurációt l_2-nek rögzítjük, a másik konfiguráció tetszőleges. Így a kérdés a következő: Milyen K konfigurációkra teljesül, hogy a sík minden piros-kék színezésében vagy található egységtávolságú piros pontpár, vagy K-val egybevágó egyszínű kék konfiguráció?
Erdősék azt sejtették, hogy K jó választása például az egységnégyzet. Néhány évvel később Juhász ennél többet bizonyított: minden 4 pontú konfiguráció teljesíti a feltételeket:

3.2. Tétel (Juhász [26])**.** *Legyen K egy tetszőleges 4 pontú konfiguráció. Ekkor $\mathbb{R}^2$ minden megengedett piros-kék színezése tartalmaz K-val egybevágó kék konfigurációt. Azaz $\mathbb{R}^n \to (l_2, K)$ minden 4 pontú K konfiguráció esetén fennáll.*

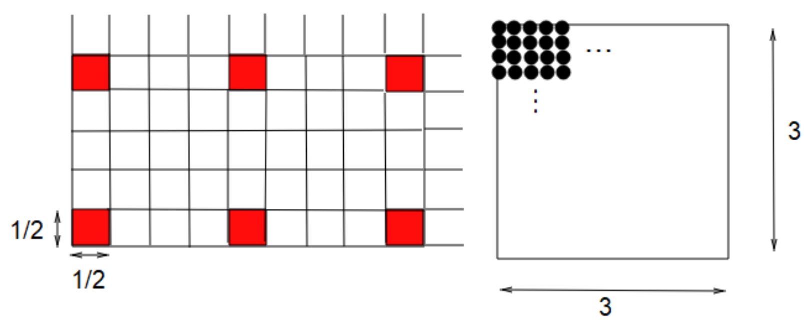
Már Erdősék cikkében is megjelent, hogy létezik olyan konfiguráció, mely nem tesz eleget a feltételeknek. Ezt egy nem éppen optimális rácsmenti színezés-konfiguráció párral igazolták:

3.3. Tétel (Erdős és társai [15])**.** *Létezik egy K konfiguráció és $\mathbb{R}^2$-nek egy olyan piros-kék színezése, mely nem tartalmaz egységtávolságú piros pontpárt és minden K-val egybevágó konfigurációnak legalább az egyik pontja piros. Vagyis létezik olyan K konfiguráció, melyre $\mathbb{R}^n \not\to (l_2, K)$.*

Bizonyítás. Színezzük pirosra az alábbi halmaz pontjait:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2m \leq x \leq 2m + 1/2, 2n \leq y \leq 2n + 1/2, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

Vegyük az egész pontok által meghatározott rács $3/10^6$-szeresét. A K konfiguráció pontjai legyenek a $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$ négyzetbe eső 10^{12} rácspont.



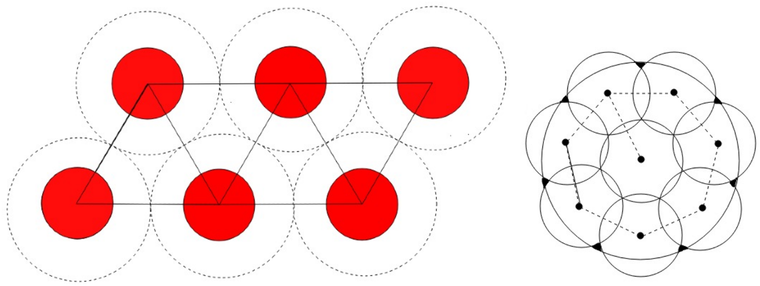
Ellenőrizhető, hogy minden K-val egybevágó konfigurációnak legalább az egyik pontja piros. $\square$

Juhász a már említett cikkében egy 12 pontú ellenpéldát mutatott. Később Csizmadia és Tóth tovább javítottak ezen:

3.4. Tétel (Csizmadia-Tóth [10])**.** *Létezik egy 8 pontból álló K konfiguráció és $\mathbb{R}^2$-nek egy olyan piros-kék színezése, mely nem tartalmaz egységtávolságú piros pontpárt és minden K-val egybevágó konfigurációnak legalább az egyik pontja piros. Vagyis létezik 8 pontú K konfiguráció, melyre $\mathbb{R}^2 \not\to (l_2, K)$.*

Bizonyítás. (Vázlat)

Színezzük pirosra a $\{1/2\ \mathrm{Int}\, B_2 + \lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ halmaz pontjait, ahol Λ a 2 oldalú háromszögrács pontjainak halmaza, $\mathrm{Int}\, B_2$ pedig a nyílt euklideszi egységkört jelöli. Vegyünk egy szabályos hétszöget, melynek körülírt körének sugara $0,9$. A konfiguráció álljon a hétszög csúcsaiból, illetve a körülírt kör középpontjából.



Megmutatható, hogy egy K-val egybevágó konfiguráció pontjai köré írt 1/2 sugarú körök uniója tartalmaz Λ-beli pontot. Tehát a konfigurációnak a megfelelő körhöz tartozó pontja piros. □

A feladatot tetszőleges Minkowski térben is vizsgálhatjuk. Legyen C egy n dimenziós origóra középpontosan szimmetrikus konvex test. $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ egy piros-kék színezését megengedettnek nevezünk, ha minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ piros pontpárra $d(x,y) = \|x-y\|_C \neq 1$.

Jelölje $k_n(C)$ azt a legnagyobb értéket, melyre teljesül, hogy tetszőleges $k_n(C)$ pontú K konfiguráció esetén $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ minden megengedett színezésében létezik K-val egybevágó egyszínű kék konfiguráció. Az euklideszi norma esetén egyszerűen a k_n jelölést használjuk. Jelöljük $*$-gal, ha az egybevágósági transzformációk helyett csak eltolásra szorítkozunk. Definíció alapján rögzített C-re $k_n^*(C) \le k_n(C)$. A továbbiakban $k_n(C)$ és $k_n^*(C)$ értékeit vizsgáljuk, kitérve néhány speciális esetre. Az előzőek alapján $4 \le k_2 < 8$ ismert.

Alsó korlát $k_n^*(C)$-re

Szlam $\chi(\mathbb{R}^n)$ és k_n^* közti kapcsolatot vizsgálta. Megmutatta, hogy ha adott $\mathbb{R}^n$-nek egy megengedett piros-kék színezése és egy hozzátartozó k pontú konfiguráció, melynek minden eltoltjának legalább az egyik pontja piros, akkor a színezés-konfiguráció pár segítségével megadhatjuk $\mathbb{R}^n$-nek egy jó k-színezését:

3.5. Lemma (Szlam I. [45]). $\chi(\mathbb{R}^n) \le k_n^* + 1$

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan konfiguráció-színezés ellenpélda párt, ahol a konfiguráció minimális, azaz $k_n^* + 1$ elemszámú. Pontjai legyenek $a_1, \dots a_k$. Ez alapján megadjuk $\mathbb{R}^n$-nek egy k-színezését: Egy p pontot a legkisebb olyan i színnel színezzük, melyre $p + a_i$ piros. A feltételek alapján minden pontot kiszíneztünk és egyik színosztályban sincs egységtávolságú pontpár. □

A sík kromatikus számára sokáig a legjobb ismert alsó korlát 4 volt, ezt a Moser-gráf tanúsítja. Nemrég azonban hatalmas előrelépés történt a feladattal kapcsolatban:

3.6. Tétel (de-Grey [25], Exoo és Ismailescu [18])**.** $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$.

A fentiekből adódik, hogy minden 4 pontú konfigurációnak egy megengedett piros-kék színezésben található kék eltoltja, $k_2^* \geq 4$. Ez a 3.2. Juhász tételénél erősebb állítás.

Magasabb dimenzióban sokáig csak lineáris alsó korlátok voltak ismertek. Így nagy áttörést jelentett, mikor Frakl és Wilson halmazrendszerek segítségével exponenciális korlátot mutatott:

3.7. Tétel (Frankl-Wilson [22])**.** $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \left(1.2 + o(1)\right)^n$

Bizonyítás. (Vázlat)

Legyen q prímhatvány. Vegyük az n dimenziós tér azon pontjait, melyeknek koordinátái közt $(2q-1)$ helyen áll $1/\sqrt{2q}$, a többi koordináta pedig 0. Egy v ponthoz definiáljuk az $F(v) := \{i | x_i \neq 0\}$ halmazt. Ekkor v_1, v_2 pontok távolsága pontosan akkor 1, ha $F(v_1)$ és $F(v_2)$ metszete $(q-1)$ elemű. Így átfogalmazhatjuk a feladatot a következőképp: Maximum hány $F(v)$ halmazt válaszhatunk ki úgy, hogy egyik halmazpárnak se legyen a metszete $(q-1)$ elemű? Megmutatható, hogy $\binom{n}{q-1}$ halmaznál nem választhatunk többet, tehát:

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \max_{q \text{ prímhatvány}} \frac{\binom{n}{2q-1}}{\binom{n}{q-1}}$$

Megfelelően választva q értékét $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.2 + o(1))^n$ adódik. □

3.1. Megjegyzés. *Raigorodskii [36] javított ezen, a legjobb ismert alsó korlát:* $(1.239 + o(1))^n$.

3.1. Következmény. *k_n^* és így k_n is exponenciálisan nő.*

Szlam lemmája általánosabb alakban is megfogalmazható:

3.8. Lemma. $\chi((\mathbb{R}^n, \|.\|_C)) \leq k_n^*(C) + 1$.

Síkban ismert, hogy tetszőleges X Minkowski térre $e(X) \geq 3$, így ebben az esetben a Moser gráf általánosítása mutatja, hogy $\chi(\mathbb{R}^2, \|.\|_C) \geq 4$, tehát $k_2^*(C) \geq 3$.

Magasabb dimenzióban azonban sokkal rosszabb a helyzet. Meglepő módon a szabályos szimplex által adottnál egyelőre nem ismert jobb konstrukció. Így a legjobb ismert alsó korlát a 2.8. Swanepoel és Villa tételéből következik: létezik c konstans, melyre $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \geq \exp(c\sqrt{\log n})$ teljesül.

Néhány esetben ismert ennél jobb, exponenciális alsó korlát: A Frankl-Wilson konstrukció a permutáció-invariáns normákra, így például az l_p normákra is megfelelő. Kiemelt szerepük miatt az l_p normák vizsgálata nagyobb figyelemben részesült, így van, hogy még jobb eredmény is ismert: Raigorodskii [37] $(-1, 0, 1)$ vektorok segítségével javított az l_1 normára vonatkozó konstrukción és megmutatta, $\chi(\mathbb{R}^n, l_1) \geq \left(1.365 + o(1)\right)^n$. A pontos érték egyedül l_∞ esetében ismert: $\chi(\mathbb{R}^n, l_\infty) = 2^n$.

Felső korlát $k_n(C)$-re

Első megfigyelésként elmondhatjuk, hogy $k_n(C)$ véges: Legyen $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) = k$. Az Erdős-de-Bruijn tétel [5] alapján létezik egy véges K ponthalmaz, ami ezt tanúsítja, azaz minden K-val egybevágó halmaz a k-színezés minden színosztályából tartalmaz pontot. Válasszuk pirosnak a k-színezés egyik színosztályát, így $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \not\to (l_2, K)$ teljesül.

A feladat további vizsgálata előtt tekintsünk néhány hasznos definíciót és jelölést, melyet Rogers vezetett be az 1950-es években. Legyen C egy középpontosan szimmetrikus konvex test, Λ pedig rács $\mathbb{R}^n$-ben.

$$\gamma(C,\Lambda) := \min\{\lambda \mid \lambda C + \Lambda \text{ lefedi } \mathbb{R}^n\text{-et}\}$$

$$\gamma^*(C) := \min_{\Lambda}\{\gamma(C,\Lambda) \mid C + \Lambda \text{ pakolás } \mathbb{R}^n\text{-ben}\}$$

Ekkor $\gamma^*(C)$-t a C test szimultán rács pakolási és fedési konstansának nevezzük. Hasonlóan bevezethetjük a szimultán pakolási és fedési konstanst, $\gamma(C)$-t, ha a fenti definícióban Λ rácsot $\mathbb{R}^n$-nek egy tetszőleges diszkrét részhalmazával helyettesítjük.
Definícióból közvetlenül adódnak az alábbi összefüggések:

$$\gamma(C) < 2$$

$$\gamma(C) \leq \gamma^*(C)$$

Ezen konstansok más területeken is igen hasznosnak bizonyultak, ennek köszönhetően nagy figyelemben részesültek az elmúlt időkben. Ennek ellenére csak kevés eredmény született velük kapcsolatban. Az első felső korlát Rogerstől [39] származik: $\gamma^*(C) < 3$. Később Butler javított ezen:

3.9. Tétel (Butler [6])**.** *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor létezik c konstans, hogy:*

$$\gamma^*(C) \leq \left(\frac{vol(C-C)}{vol(C)} n^{\log_2 \ln(n)+c}\right)^{1/n}$$

3.2. Következmény. *Nagy n esetén minden n-dimenziós szimmetrikus konvex C testre:*

$$\gamma^*(C) \leq 2 + o(1)$$

A fentiek segítségével könnyen adhatunk olyan színezés, K konfiguráció párt, hogy a színezés ne tartalmazzon K-val egybevágó kék konfigurációt:
Megengedett piros-kék színezést kapunk, ha pirosra színezzük az $\{1/2 \text{ Int } C + \Lambda | \lambda \in \Lambda\}$ halmaz pontjait, ahol $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$, melyre $\gamma(C)$ felveszi a minimumát, Int C pedig a C test belsejét jelöli. Legyen $K = \{a_1, \ldots a_k\}$ konfiguráció olyan, hogy

$$E := \bigcup_{a_i \in K} 1/2 \text{ Int } C + a_i \supseteq \gamma(C)C$$

Definícióból adódóan $\gamma(C)C$ és így E is tartalmaz Λ-beli pontot. C középpontos szimmetriája miatt minden K-val egybevágó konfigurációnak legalább az egyik pontja piros, azaz $k_n(C) < |K|$.

Vizsgáljuk meg az így kapott konfiguráció pontszámát. Legyen C_1 és C_2 test. Jelölje $N(C_1, C_2)$ azt a legkisebb k értéket, melyre teljesül, hogy C_1 lefedhető C_2 k db eltoltjával. Mivel $\gamma(C) < 2$ minden szimmetrikus konvex C test esetén fenn áll, elég felső korlátot adni $N\big(2C,\ 1/2 \text{ Int } C\big)$ értékére. Ehhez szükségesek az alábbi definíciók:

3.1. Definíció. *Legyen $\mathscr{F}$ $\mathbb{R}^n$-beli konvex testek egy családja.*

$\mathscr{F}$ felső sűrűsége:

$$\overline{d}(\mathscr{F}) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\sum\limits_{F\in\mathscr{F}, F\subseteq rB} vol(F)}{vol(rB)}$$

$\mathscr{F}$ alsó sűrűsége:

$$\underline{d}(\mathscr{F}) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\sum\limits_{F\in\mathscr{F}, F\subseteq rB} vol(F)}{vol(rB)}$$

Amennyiben $\overline{d}(\mathscr{F}) = \underline{d}(\mathscr{F})$, ezt az értéket az $\mathscr{F}$ sűrűségének nevezzük és $d(\mathscr{F})$-el jelöljük.

3.2. Definíció (Fedési sűrűség)**.** *Legyen $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex test. C fedési sűrűsége:*

$$\theta(C) = \min\{d(\mathscr{F}) | \mathscr{F} = \{x_1 + C, x_2 + C, \dots\}, \cup\mathscr{F} = \mathbb{R}^n\}$$

A fedési sűrűség felső korlátjára vonatkozó első lényeges eredmény Rogerstől származik:

3.10. Tétel (Rogers [39])**.** *Legyen $C \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ konvex test. Ekkor:*

$$\theta(C) \leq n \log n + n \log\log n + 5n$$

A fedési sűrűségre vonatkozó felső korlát segítségével adhatunk felső becslést $N(C_1, C_2)$értékére:

3.11. Tétel (Rogers, Rogers-Zong [41])**.** *Legyen $C \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor*

$$N(C, L) \leq \frac{vol(C - L)}{vol(L)} \cdot \theta(L)$$

3.3. Következmény. *Legyen $C \subset \mathbb{R}^n$ szimmetrikus konvex test. Ekkor minden $0 < r < 1$ érték esetén:*

$$N(C, rC) \leq (1 + 1/r)^n \cdot \theta(C)$$

A 3.10. Rogers tétele alapján $n \geq 3$-ra: $N(C, rC) \leq (1 + 1/r)^n \cdot n \cdot \log n + \log\log n + 5n$. Tehát nagy n esetén $|K| \leq \big(5 + o(1)\big)^n$. Erre alkalmazva a 3.5. Szlam I. lemmáját $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \leq \big(5 + o(1)\big)^n$ adódik. Hasonló korlátot adott Füredi és Kang. Bizonyításuk fontos eleme, hogy létezik olyan fedés, melyben minden pont lefedettségi multiplicitása kicsi. Ezt először Erdős és Rogers bizonyították:

3.12. Tétel (Erdős-Rogers [17])**.** *Legyen $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor $\mathbb{R}^n$-nek létezik egy C eltoltjaiból álló fedése, melyre:*

- $\theta(C) \leq n \log n + n \log\log n + 5n$
- *$\mathbb{R}^n$ pontjának lefedettségi multiplicitása kisebb mint* $e(n \log n + n \log\log n + 5n)$

3.13. Tétel (Füredi-Kang [23]). $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \le \left(5 + o(1)\right)^n$

Bizonyítás. Fedjük le $\mathbb{R}^n$-et $1/2C$ eltoltjaival úgy, hogy minden pont lefedettségi multiplicitása maximum $c(n\log n)$. Definiáljunk egy $G = (V, E)$ gráfot: Csúcsai a fedésben szereplő testeknek feleljenek meg, és u és v csúcs közt fusson él, ha az általaluk reprezentált $C + v$, $C + u$ eltoltakból kiválasztható egységnél kisebb távolságú pontpár. Legyen $v \in V$ egy csúcs. Szomszédjai olyan u csúcsok lehetnek, melyre $C + u \cap 5/2C + v \neq \emptyset$. Így:

$$\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \le \Delta(G) \le c(n\log n)\frac{\text{vol}(5/2C)}{\text{vol}(1/2C)} \le c(n\log n)5^n$$

□

Ha C gömb, még jobb korlát ismert a fedési számra:

3.14. Tétel (Rogers [40]). *Létezik egy $c > 0$ konstans, hogy minden $r > 1/2$ és $n \ge 9$ esetén:*

$$N(rB, 1/2B) \le cn^{5/2}(2r)^n$$

Így az euklideszi esetben nagy n esetén $|K| \le \left(4 + o(1)\right)^n$.

3.2. Megjegyzés. *Ismert, hogy $\gamma(B_n) \ge 2^{0.599} + o(1)$. Tehát a fenti módszert alkalmazva nem kaphatunk $\left(2\cdot 2^{0.599} + o(1)\right)^n \approx \left(3.03 + o(1)\right)^n$-nél jobb felső korlátot. A későbbiekben látjuk, $k_n^* < \left(3 + o(1)\right)^n$.*

Síkban lényegesen jobb felső korlát ismert $\gamma(C)$-re. Első megfigyelés, hogy Alspund alábbi tétele alapján $\gamma(C) \le 3/2$.

3.15. Tétel (Asplund [3]). *Legyen C egy középpontosan szimmetrikus konvex tartomány a síkban. Ekkor létezik egy P paralelogramma, melyre:*

$$P \subseteq C \subseteq \frac{3}{2}P$$

Szabályos hatszög esetén optimális.

3.3. Megjegyzés. *Stromquist [43] tétele alapján a fenti tételében P paralelogrammát más szimmetrikus konvex testre cserélve sem javítható a $3/2$-es szorzó.*

Válasszuk P-t a tételben szerelő paralelogrammának. Legyen $\{3/2P + x | x \in \Lambda\}$ a síknak egy csempézése. Ekkor $\{C + x | x \in \Lambda\}$ C-nek egy pakolása. A 3.15. Asplund tétele alapján $\{3/2C + x | x \in \Lambda\}$ lefedi a síkot, vagyis $\gamma(C) \le 3/2$.
Az eddig ismert legjobb korlát Zongtól származik:

3.16. Tétel (Zong [47]). *Legyen C egy középpontosan szimmetrikus konvex tartomány a síkban. Ekkor:*

$$\gamma(C) = \gamma^*(C) \le 2\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 1.17157$$

Affin szabályos nyolcszög esetén optimális.

A fedési sűrűségre az alábbi tételek segítségével adhatunk felső korlátot:

3.17. Tétel (Fejes-Tóth [19])**.** *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^2$ szimmetrikus konvex tartomány. Legyen H a C-be írt legnagyobb területű szimmetrikus hatszög. Ekkor:*

$$\theta(C) = \frac{vol(C)}{vol(H)}$$

Megmutatható, hogy egy szimmetrikus konvex tartományba írt maximális területű m-szög választható szimmetrikusnak, ha m páros (Dowker [12]). Így a fentiek alapján elég felső becslést adni a C-be írt maximális területű hatszög területére:

3.18. Tétel (Sas [42])**.** *Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^2$ konvex tartomány és $m \geq 3$ egész. Legyen P a C-be írható maximális területű m-szög. Ekkor:*

$$vol(P) \geq \frac{m}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) vol(C)$$

Ellipszoid esetén optimális.

3.4. Következmény. *Minden $C \subseteq \mathbb{R}^2$ szimmetrikus konvex tartomány esetén:*

$$\theta(C) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{27}}$$

Ellipszoid esetén optimális.

Így a 3.3. Rogers-Zong tétel következménye alapján $N\big(\gamma(C)C, \mathrm{Int} 1/2C\big) \leq (1+4(2-\sqrt{2}))^2 \cdot 2\pi/\sqrt{27} < 14$. Vagyis tetszőleges Minkowski síkban létezik 14 pontú K metrikus tér és egy megengedett piros-kék színezés, melyben minden K-val izometrikus halmaznak legalább az egyik pontja piros. Azaz létezik 14 pontú K konfiguráció, melyre $(\mathbb{R}^2, \|.\|_C) \not\rightarrow (l_2, K)$.

3.4. Megjegyzés. *Mivel $\gamma(B_2) = 2/\sqrt{3}$ és $N(2/\sqrt{3}B_2, 1/2B_2) = 9$, ezzel a módszerrel nem kaphatunk 9-nél kevesebb pontból álló konfigurációt.*

Felső korlát $k_n^*(C)$-re

A $k_n(C)$-re adott felső korlát természetesen $k_n^*(C)$-re is megfelelő. Azonban $\mathbb{R}^n$ kromatikus számának segítségével ennél jobb korlát is adható: Szlam megmutatta, I. lemmája részben megfordítható.

3.19. Lemma (Szlam II. [45])**.** *Ha $\chi(\mathbb{R}^n) \leq k$ és ezt olyan k-színezés igazolja, melyben a színosztályok egymás eltoltjai, akkor $k_n^* < k$.*

Bizonyítás. Legyenek az adott színosztályok: C, $C + v_1 \dots C + v_{k-1}$. C pontjait színezzük pirosra, a többi pont legyen kék. Ez egy megengedett színezés. Álljon a konfiguráció az eltolás vektorokból, azaz $K := \{0 = v_0, v_1, \dots v_{k-1}\}$. Ekkor K minden eltoltja a k-színezés színosztályaiból 1-1 pontot tartalmaz: Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy p pont és i, j indexek, melyekre $p + v_i$ és $p + v_j$ ugyanabban a

C_a színosztályban vannak. Tudjuk, hogy $C_a = C + v_a$, vagyis $(p + v_i - v_a)$ és $(p + v_j - v_a)$ is C-ben van. Ekkor a $(p + v_i - v_a) + v_j = (p + v_j - v_a) + v_i$ pontnak az egyenlőség bal oldala alapján C_j, a jobb oldala alapján pedig C_i színt kellene kapnia, ami ellentmondás. Így K egyik pontja a pirosnak választott C halmazba esik. $\square$

Szlam II. lemmája is általánosítható Minkowski terekre:

3.20. Lemma. *Ha $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \le k$ és ezt olyan k-színezés igazolja, melyben a színosztályok egymás eltoltjai, akkor $k_n^*(C) < k$.*

A kromatikus szám felső becslésére alkalmas a következő módszer: Legyen Λ rács $\mathbb{R}^n$-ben. Definiáljunk egy V halmazt, melyre:

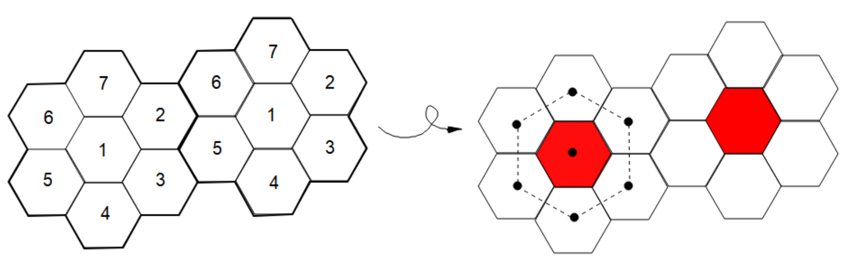
- V átmérője kisebb mint 1, azaz $\forall x_1, x_2 \in V : |x_1 - x_2| < 1$
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ esetén $\forall x \in V + \lambda_1$, $\forall y \in V + \lambda_2 : |x - y| > 1$

Az egyik színosztály legyen $S_0 := \bigcup_{x \in \Lambda} V + x$. Ha az is teljesül, hogy S_0 k eltoltja lefedi $\mathbb{R}^n$ összes pontját, akkor $\mathbb{R}^n$ megfelelő k-színezését kaptuk.

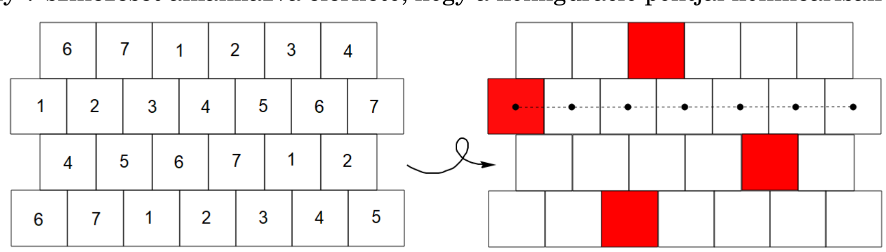
Coulson [9] megmutatta, hogy V halmazt a rácshoz tartozó Voronoi poliédernek, azaz:

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le |x - b| \ \forall b \in \Lambda\}$$

halmaznak választva ezzel a technikával nem kaphatunk $\left(2^{n+1} - 1\right)$-nél kevesebb színt igénylő színezést. Egyedül a síkban és a 3 dimenziós térben ismertek olyan konstrukciók, melyek éppen ennyi színt használnak. Síkban vegyünk egy egységnél kicsit kisebb átmérőjű szabályos hatszögekből álló csempézést. Az egyik hatszöget színezzük ki az 1. színnel, szomszédjait pedig 1-1 további színnel. A hatszögek oldalait megfelelő színűnek választva olyan 7-színezést kapunk, ahol a színosztályok egymás eltoltjai, így $k_2^* < 7$ adódik.



Sőt, Székely 7-színezését alkalmazva elérhető, hogy a konfiguráció pontjai kollineárisak legyenek:



Térben Radoičić és Tóth [35], illetve Coulson [9] által adott 15-színezésére is alkalmazhatjuk Szlam lemmáját, így $k_3^* < 15$.

Chilakamarri [7] és Kristiansen [28] megmutatták, hogy az euklideszi esethez hasonlóan hatszögekkel való csempézéssel $(\mathbb{R}^2, \|.\|_C)$-nek is megadható jó 7-színezése: Ehhez egy olyan H affin szabályos hatszöget definiáltak, melyre $H \subseteq 1/2C$ teljesül. A hatszögek oldalait megfelelő színűnek választva olyan 7-színezést kapunk, melyben egyik színosztály sem tartalmaz egység távolságú pontpárt, és a színosztályok egymás eltoltjai, így $k_2^*(C) < 7$ adódik.
Magasabb dimenzióban csak olyan színezések ismertek, melyekben a színosztályok nem pontosan egymás eltoltjai. A lemma kis módosításával ezekben az esetekben is megfelelő Szlam bizonyításában leírt konstrukció:

3.21. Lemma. *Legyen adott $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$-nek egy olyan k-színezése, melyben a $S_0, \dots S_{k-1}$ színosztályok teljesítik a következőket: (1) $S_0 = \bigcup_{x \in \Lambda}\{C' + x\}$ alakban áll elő, ahol Λ rács, C' középpontosan szimmetrikus test, (2) a többi színosztály pedig S_0 eltoltjainak részhalmazai. Ekkor $k_n^*(C) < k$.*

Bizonyítás. S_0 pontjait színezzük pirosra, a többi pont legyen kék. Álljon $K := \{0 = a_0, a_1, \dots a_{k-1}\}$ konfiguráció az eltolásvektorokból. Mivel C' középpontosan szimmetrikus, elég belátni, hogy K minden v vektorral való eltoltjára $\bigcup_i \{C' + a_i + v\}$ tartalmaz Λ-beli pontot. S_0 rácstulajdonsága miatt egy eltoltja vagy nem tartalmaz rácspontot, vagy minden komponense 1-1 rácspontot tartalmaz.
Indirekt tegyük fel, hogy K-nak létezik egy $K + v^*$ eltoltja, amely nem teljesíti a fentieket, vagyis $\bigcup_i \{C' + a_i + v^*\}$ nem tartalmaz rácspontot. Az előző megfigyelés alapján ekkor $\bigcup_i \{S_0 + a_i + v^*\}$ sem tartalmazhat rácspontot, vagyis az $\{x - v^* | x \in \Lambda\}$ pontok semelyik színosztályhoz sem tartozhatnak, ami ellentmondás. □

Euklideszi esetben először Larman és Rogers [32] adott exponenciális felső korlátot $\mathbb{R}^n$ kromatikus számára:

3.22. Tétel (Larman-Rogers). $\chi(\mathbb{R}^n) \leq \big(3 + o(1)\big)^n$

Bizonyítás. Vegyünk egy Λ rácsot, melyre $\gamma^*(B)$ felveszi a minimumát. A 3.9. Butler tétele alapján $\gamma^*(B) \leq 2 + o(1)$, így $\{B + x | x \in \Lambda\}$ pakolás, még $\{2 + o(1)B + x | x \in \Lambda\}$ fedése $\mathbb{R}^n$-nek. Jelölje π a rácshoz tartozó Voronoi poliédert. Először egy olyan színezést adunk meg, ahol egyik színosztályban sincs 4/3 távolságú pontpár. Az egyik színosztály legyen:

$$E := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \frac{1}{3 + o(1)} \pi + \lambda \right\}$$

E nem tartalmaz 4/3 távolságú pontpárt: Egyrészt mivel a π poliéder átmérője legfeljebb $2\gamma^*(B)$, a $1/(3 + o(1)) \cdot \pi$ átmérője kisebb mint 4/3. Másrészt $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ rácspontok távolsága legalább 2, vagyis $x \in 1/(3 + o(1)) \cdot \pi + \lambda_1$ és $y \in 1/(3 + o(1)) \cdot \pi + \lambda_2$ esetén x és y távolsága nagyobb mint 4/3.
E sűrűsége:

$$\left(\frac{1}{3 + o(1)} \right)^n$$

Így Erdős és Rogers módszerével [17] $\mathbb{R}^n$ lefedhető E-nek $[n\log n + n\log\log n + 4n](3+o(1))^n$ eltoltjaival. Tehát nagy n esetén E eltoltjainak segítségével $(3+o(1))^n$ színosztályt határozhatunk meg. Kicsinyítéssel elérhetjük, hogy a színosztályok ne tartalmazzanak egységtávolságú pontpárt. □

A bizonyításban konstruált színezésre teljesülnek a 3.21 lemmában lévő feltételek: S_0 színosztályt választhatjuk az E halmaznak, hiszen egy rácshoz tartozó Voronoi poliéder középpontosan szimmetrikus. Tehát $k_n^* < \left(3+o(1)\right)^n$ adódik.

A már ismertetett 3.13. Füredi-Kang tétel azt állítja, $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \leq \left(5+o(1)\right)^n$. Később Kupavskii javított ezen eredményen:

3.23. Tétel (Kupavskii [30])**.** *C legyen egy középpontosan szimmetrikus konvex test. Ekkor*

$$\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \leq \left(4+o(1)\right)^n$$

Bizonyítás. (Vázlat)
Legyen Λ rács, $f(n)$ egy gyorsan csökkenő függvény. Az első színosztály legyen:

$$S_0 := \bigcup_{x\in\Lambda} \left\{ \frac{1-f(n)}{4} C + x \right\}$$

A Λ rácsot, és $f(n)$ függvényt megfelelően választva S_0 nem tartalmaz egységtávolságú pontpárt és S_0 sűrűsége:

$$\left(\frac{1}{4+o(1)}\right)^n$$

Így Erdős és Rogers módszerével $\mathbb{R}^n$ lefedhető S_0-nek $[n\log n + n\log\log n + 4n](4+o(1))^n$ eltoltjaival. Tehát nagy n esetén S_0 eltoltjainak segítségével $(4+o(1))^n$ színosztályt határozhatunk meg. □

A bizonyításban szereplő színezés megfelel a 3.21 lemmában szereplő feltételeknek, így $k_n^*(C) < \left(4+o(1)\right)^n$.

Összefoglalva a következő felső korlátokat ismerjük:

	síkban	nagy n esetén
k_n	8	$\left(4+o(1)\right)^n$
k_n^*	7	$\left(3+o(1)\right)^n$
$k_n(C)$	14	$\left(5+o(1)\right)^n$
$k_n^*(C)$	7	$\left(4+o(1)\right)^n$

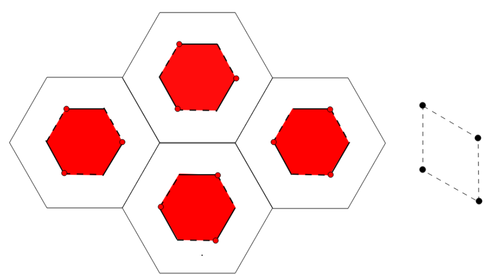
Érdemes néhány síkbeli esetet külön megvizsgálni.

1. Legyen C egy paralelogramma.

   Jelölje C' a C által meghatározott rács fundamentális tartományát. Legyen $\{C'+x|x\in\Lambda\}$ a síknak egy csempézése, és színezzük pirosra az $\{1/2C'+x|x\in\Lambda\}$ halmaz pontjait. Mivel két pont távolsága pontosan akkor 1, ha a paralelogramma szemközti oldalain helyezkednek el, ez egy megengedett színezés. $N(C',1/2C')=4$, így ebben az esetben $\chi(\mathbb{R}^n,\|.\|_C)=k_2^*(C)+1=k_2^*(C)+1=4$.

2. Legyen C affin szabályos hatszög.

   Chilakamarri [7] olyan 4-színezést adott, melyre alkalmazható a 3.19. Szlam II.lemmája. Az így kapott színezés, konfiguráció pár:

   Tehát hatszög esetén $\chi(\mathbb{R}^n,\|.\|_C)=k_2^*(C)+1=4$.

   Chilakamarri 4-színezése segítségével olyan K konfigurációt is meghatározhatunk, melyre teljesül, hogy nincs vele izometrikus egyszínű kék konfiguráció: A K konfiguráció álljon a Moser-gráf csúcsaiból. A Moser gráf kromatikus száma 4, így a sík 4-színezésében egy K-val egybevágó konfigurációnak minden színosztályban lesz pontja. A 4-színezés egyik színosztályának pontjait válasszuk pirosnak. Ekkor minden K-val egybevágó konfigurációnak legalább az egyik pontja piros. Így $k_2(C)<7$.

3. Legyen C egy szabályos nyolcszög.

   Nemrég Ismailescu belátta, hogy $\chi(\mathbb{R}^2,\|.\|_C)\geq 5$, így $k_2^*(C)\geq 4$.

   Legyen r a nyolcszög beírt körének sugara, B_2 az euklideszi egységkör.

   $N\big(\gamma(C)C,\ 1/2C\big)\leq N\big(\gamma(C)B_2,\ r/2B_2\big)=N\big(2\cdot(2-\sqrt{2})B_2,\ (1+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2-\sqrt{2}})/4B_2\big)=11.$

   Így $k_2(C)<11$.

4. Legyen C_l egy szabályos l-szög.

   Azt már láttuk, hogy $k_2(C_4)<4$, $k_2(C_6)<7$. Az előző becslés alapján minden l-re $k_2(C_l)<11$. Nagyobb l-re ez javítható: $N\big(\gamma(C_l)C,\ 1/2C\big)\leq N\big(\gamma(C_l)B_2,\ r/2B_2\big)\leq N\big(2(2-\sqrt{2})B_2,\ r/2B_2\big)$ értéke $l=10$ és 12 esetén 10, $l\geq 14$ esetén 9.

5. Legyen C olyan, hogy $d(P,C)\leq(6+3\sqrt{2})/8\approx 1.28$, ahol P egy paralelogramma. Ekkor $k_2(C)<9$.

4. További kérdések

A félév során sok apró kérdés, illetve kevésbé apró probléma merült fel a vizsgált feladatokkal kapcsolatban. A továbbiakban például ezekre szeretnék választ találni vagy legalábbis keresni:

1. Csizmadia-Tóth konfiguráció más metrikában:
   Ha $d(C,B_2)$ kicsi, akkor jó-e a Csizmadia-Tóth konfiguráció, azaz teljesül-e $k_2(C) < 8$?
   Igaz-e, hogy C vagy közel van egy paralelogrammához, vagy közel van egy hatszöghöz/körhöz?

2. Szlam II. lemmájának általánosítása:
   A 3.21. lemmában elhagyható-e a piros színosztály rácsszerű struktúrája?

3. Alsó korlát Minkowski tér kromatikus számára:
   Lehet-e általánosítani a Frankl-Wilson tételt?
   Vagy egyáltalán milyen alsó korlát adható?

4. Erősen Ramsey halmazok:
   Minden háromszög erősen Ramsey?
   Milyen érdekes példák vannak nem erősen Ramsey halmazra?

Hivatkozások

[1] N. Alon, V. D. Milman (1983) *Embedding of l^k_∞ in finite dimensional Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics, 45(4), $265-280$.

[2] A. Arman, S. Tsaturian (2018) *A result in asymmetric Euclidean Ramsey theory*, Discrete Mathematics, $341(5), 1502-1508$.

[3] E. Asplund (1960) *Comparison between plane symmetric convex bodies and parallelograms*, Mathematica Scandinavica $8.1, 171-180$.

[4] P. Brass (1999) *On equilateral simplices in normed spaces*, Beiträge Algebra Geom. 40, no. 2, 303–307. MR1720106 ($2000i : 52012$)

[5] N. D. Bruijn, P. Erdős (1951) *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Indigationes Mathematicae, 13, $371-373$.

[6] G. J. Butler (1972) *Simultaneous packing and covering in Euclidean space*, Proc. London Math. Soc. 25, 721–735.

[7] Chilakamarri, B. Kiran (1991) *Unit-distance graphs in Minkowski metric spaces*, Geometriae Dedicata $37.3 : 345-356$.

[8] D. Conlon, J. Fox (2019) *Lines in Euclidean Ramsey theory*, Discrete & Computational Geometry, 61(1), 218 – 225.

[9] D. Coulson (2001) *A 15-colouring of 3-space omitting distance one*, Discrete Mathematics 256, 83–90.

[10] Gy. Csizmadia, G. Tóth (1994) *Note on a Ramsey-type problem in geometry*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 65(2), 302 – 306.

[11] B. V. Dekster (2000) *Simplexes with prescribed edge lengths in Minkowski and Banach spaces*, Acta Mathematica Hungarica, 86(4), 343 – 358.

[12] C. H. Dowker (1944) *On minimum circumscribed polygons*, Bulletin of the American Mathematical Society, 50(2), 120 – 122.

[13] A. Dvoretzky (1961) *Some results on convex bodies and Banach spaces Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces*, Jerusalem 1960 Jerusalem Academic Press, Jerusalem.

[14] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, E.G. Straus (1973) *Euclidean Ramsey Theorems*, J. Combin. Theory $A14:341-363$.

[15] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, E.G. Straus (1975) *Euclidean Ramsey Theorems II.*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai vol. 10, Infinite and Finite Sets: 529 – 557, North-Holland, Amsterdam.

[16] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, E.G.Straus (1975) *Euclidean Ramsey Theorems III.*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai vol.10, Infinite and Finite Sets: 559 – 583, North-Holland, Amsterdam.

[17] P. Erdős, C. A. Rogers (1962) *Covering space with convex bodies*, Acta Arithmetica 7.3, 281 – 285.

[18] G. Exoo, D. Ismailescu (2019) *The chromatic number of the plane is at least 5: A new proof*, Discrete & Computational Geometry, 1 – 11.

[19] L. Fejes-Tóth (1950) *Some packing and covering theorems*, Acta Sci. Math. Szeged, 12(A), 62 – 67.

[20] P. Frankl, V. Rödl (1986) *All Triangles Are Ramsey*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 297, no. 2, 1986, pp. 777–779.

[21] P. Frankl, V. Rödl (1987) *Forbidden intersections*, Transactions of the American Mathematical Society, 300(1), 259 – 286.

[22] P. Frankl, R. M. Wilson (1981) *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica, 1(4), 357 – 368.

[23] Z. Füredi, J-H. Kang (2008) *Covering the n-space by convex bodies and its chromatic number*, Discrete mathematics 308.19, 4495 – 4500.

[24] R. L. Graham (1990) *Topics in Euclidean Ramsey Theory*, In Mathematics of Ramsey Theory (pp. 200 – 213), Springer, Berlin, Heidelberg.

[25] A. de Grey (2018) *The Chromatic Number of the Plane Is at least 5*, Geombinatorics, 28, 5–18.

[26] R. Juhász (1979) *Ramsey type theorems in the plane*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 27(2), 152 – 160.

[27] T. Kobos (2014) *Equilateral dimension of certain classes of normed spaces*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 35(10), 1340 – 1358.

[28] G. K. Kristiansen (2001) *Distance one graph in the plane*

[29] I. Kříž (1991) *Permutation groups in Euclidean Ramsey theory*, Proceedings of the American Mathematical Society, 112(3), 899 – 907.

[30] A. Kupavskii (2011) *On the chromatic number of* $\mathbb{R}^n$ *with an arbitrary norm*, Discrete Math., 311(6) : 437–440.

[31] A. Kupavskii, A. Sagdeev (2020) *All finite sets are Ramsey in the maximum norm*, arXiv preprint arXiv:2008.02008.

[32] D. G. Larman, C. A. Rogers (1972) *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19(1), 1 – 24.

[33] I. Leader, P. A. Russell, M. Walters (2012) *Transitive sets in Euclidean Ramsey theory* Journal of Combinatorial Theory, Series A 119.2, 382 – 396.

[34] R. Prosanov (2020) *A new proof of the Larman–Rogers upper bound for the chromatic number of the Euclidean space*, Discrete Applied Mathematics 276, 115 – 120.

[35] R. Radoičić, G. Tóth (2003) *Note on the chromatic number of the space*, Discrete and computational geometry, Springer, Berlin, Heidelberg, 695 – 698.

[36] A. M. Raigorodskii (2000) *On the chromatic number of a space*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk 55.2, 147 – 148.

[37] A. M. Raigorodskii (2004) *The chromatic number of a space with the metric* l_q, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 59(5), 161 – 162.

[38] F. P. Ramsey (1930) *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. 30, 264 – 286.

[39] C. A. Rogers (1950) *A note on coverings and packings*, J. London Math. Soc. 25, 327–331.

[40] C. A. Rogers (1963) *Covering a sphere with spheres*, Mathematatika 10, 157–164.

[41] C. A. Rogers, C. Zong (1997) *Covering convex bodies by translates of convex bodies*, Mathematika 44.1, 215 – 218.

[42] E. Sas (1939) *Über eine extremumeigenschaft der ellipsen*, Compositio Mathematica, 6, 468 – 470.

[43] W. Stromquist (1981) *The maximum distance between two-dimensional Banach spaces*, Math. Scand. 48, 205–225.

[44] K. Swanepoel, R. Villa (2008) *A lower bound for the equilateral number of normed spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society, 136(1), 127 – 131.

[45] A. D. Szlam (2001) *Monochromatic translates of configurations in the plane*, Journal of combinatorial theory. Series A, 93(1), 173 – 176.

[46] S. Tsaturian (2017) *A Euclidean Ramsey result in the plane*, arXiv preprint arXiv:1703.10723.

[47] C. Zong (2008) *The simultaneous packing and covering constants in the plane*, Advances in Mathematics 218.3, 653 – 672.