Euklideszi Ramsey elmélet

Gehér Panna
Témavezető: Tóth Géza

2020-2021. II. félév

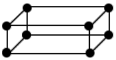
Ramsey halmazok

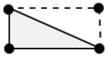
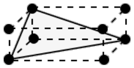
Ramsey halmazok

Definíció (Ramsey halmaz)

Egy halmaz Ramsey, ha minden r színszámhoz létezik egy n dimenziószám, hogy $\mathbb{R}^n$ minden r-színezésében van vele egybevágó egyszínű halmaz

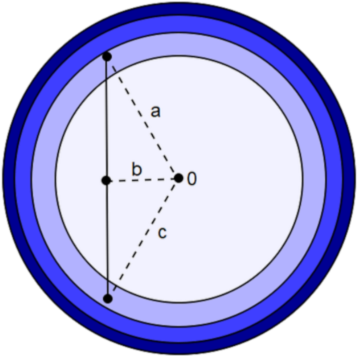
Példa Ramsey halmazra:

- 2 egységtávolságú pontpár 
- 2 Ramsey halmaz szorzata, pl: tégla 
- Ramsey halmaz részhalmaza
  pl: ⊾ háromszög, hegyesszögű háromszög

- Frankl-Rödl tétel: minden háromszög

Ramsey halmazok



Példa nem Ramsey halmazra:
(1,1,2) oldalú elfajuló Δ
$x \in \mathbb{R}^n$ színe: $\left\lfloor \|x\|^2 \right\rfloor$ mod 4
paralelogramma szabály:

$$\boxed{a^2 + c^2 = 2b^2 + 2}$$

általánosabban: nem gömbi halmazok

Sejtés (Graham, 1990)
Egy halmaz pontosan akkor Ramsey, ha gömbi

Sejtés (Leader, 2012)
Egy halmaz pontosan akkor Ramsey, ha tranzitív halmaz részhalmaza

Ramsey halmazok más metrikában

l_p-Ramsey: $\approx$ eredeti definíció
$+r = 1$ eset: egyátalán beágyazható-e?

Megfigyelés: Ha X halmaz l_2-Ramsey, akkor $l_\infty-$Ramsey is:
X Ramsey $\rightarrow$ minden r-hez létezik véges tanúhalmaz
az l_∞ térbe minden véges metrikus tér beágyazható $\rightarrow$ ✓

Kupavskii (2020): Minden véges metrikus tér $l_\infty-$Ramsey

Kérdés: Hogy általánosítható Minkowski terekre?

Definíció (Erősen Ramsey)

Egy X véges metrikus tér erősen Ramsey, ha minden $r \geq 1$-re létezik n dimenziószám, hogy minden $C = -C \subset \mathbb{R}^n$ konvex test által meghatározott Minkowski tér esetén $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ minden r-színezésében van X-szel izometrikus egyszínű halmaz.

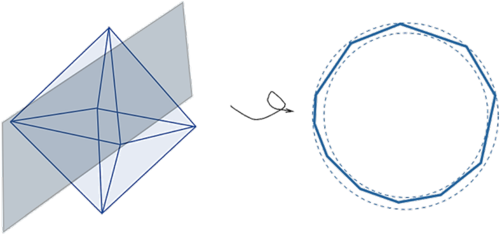
Erősen Ramsey halmazok

1. Kérdés:  erősen Ramsey?

   Cél: elég magas dimenzióban van $(r+1)$ pontú szimplex

   Az euklideszi esetben ez triviális, de általában nem az!

   Dvoretzky tétel: létezik egy közel euklideszi altér

   Brass, Dekster: Ebben van $(r+1)$ pontú szimplex

   Tehát  tényleg erősen Ramsey, de az n-re kapott korlát nagyon rossz: ha $n > c \cdot \exp((r+1)^3) \rightarrow \checkmark$

2. Kérdés: minden háromszög erősen Ramsey?

Aszimmetrikus problémák

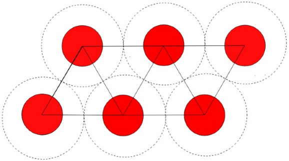
Aszimmetrikus problémák

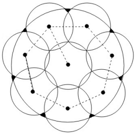
$(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \to (K_1, K_2)$:
$(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ minden piros-kék színezésében van K_1 vagy K_2
K_1-et rögzítsük: 

Feladat: Legnagyobb $k_n(C)$ érték, melyre minden $k_n(C)$ pontú K_2-re $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \to ($  $, K_2)$

Ismert:

- Juhász: $k_2 \geq 4$
- Csizmadia-Tóth: $k_2 < 8$





Módosított feladat: Csak eltolást engedünk meg $- \, k_n^*(C)$

Lemma (Szlam I.)

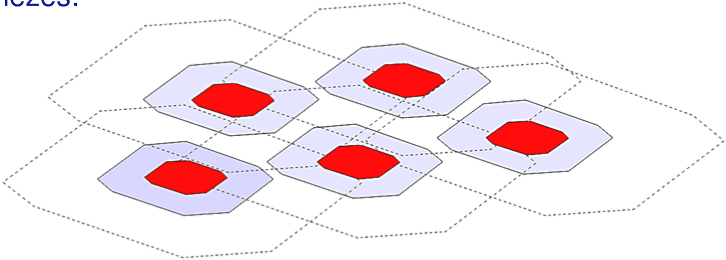
k pontú ellenpélda $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$-ben $\rightsquigarrow$ $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$ jó k-színezése

Következmény k_n^*, k_n exponenciálisan nő

Felső korlát $k_n^*(C)$-re

Szimultán fedési és pakolási konstans: $\gamma(C)$
minden n-re: $\gamma(C) \leq 2$
Zong: síkban $\gamma(C) \leq 1.17157$

Színezés:



Konfiguráció:

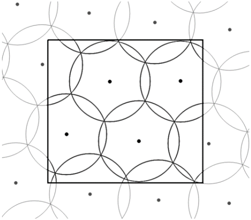
$$K = \{a_1, \dots a_k\}: \bigcup_{a_i \in K} (1/2 \text{ Int } C + a_i) \supseteq \gamma(C)C$$

Konfiguráció elemszáma

Fedési sűrűség: $\theta(C)$

Rogers (1957) $n \geq 3$:
$\theta(C) \leq n \log n + n \log \log n + 5n$

Fejes-Tóth, Sas $n = 2$:
$\theta(C) \leq 1.21$



Tétel (Rogers-Zong)

Legyen $C \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^n$ konvex test. Ekkor:

$$N(C, L) \leq \frac{vol(C - L)}{vol(L)} \cdot \theta(L)$$

$\hookrightarrow$ nagy n-re $k_n^*(C) < \big(5 + o(1)\big)^n$, $k_2^*(C) < 14$
Euklideszi esetben: az eredeti feladatra is jó, sőt jobb becslés ismert a fedési számra, így $k_n < \big(4 + o(1)\big)^n$

Jobb konstrukció

Lemma (Szlam II.)

Ha adott $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$-nek egy jó k-színezése, melyben a színosztályok egymás eltoltjai $\rightarrow k_n^*(C) < k$.

Piros: az egyik színosztály, konfiguráció: az eltolás-vektorok

alacsony dimenzióban: ✓ magasabb dimenzióban: ?

Általános módszer:

Λ rács, V halmaz, melyre:

- V átmérője < 1
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$: $\forall x \in V + \lambda_1, \forall y \in V + \lambda_2 : |x - y| > 1$

1. színosztály: $S_0 := \bigcup_{x \in \Lambda} V + x$, többi színosztály: S_0 eltoltjai

Larman-Rogers: $\chi(\mathbb{R}^n) \leq \big(3 + o(1)\big)^n$

Kupavskii: $\chi(\mathbb{R}^n, \|.\|_C) \leq \big(4 + o(1)\big)^n$

Szlam II. lemmájának kis módosítása

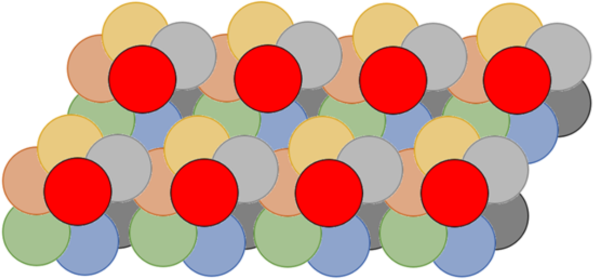
Lemma

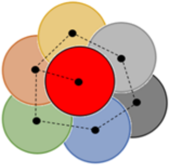
Adott $(\mathbb{R}^n, \|.\|_C)$*-nek* $S_0, \dots S_{k-1}$ *színezése, melyben:*

(1) $S_0 = \bigcup_{x \in \Lambda} \{C' + x\}$ *alakú, ahol* Λ *rács,* $C' = -C'$ *konvex*

(2) a többi színosztály S_0 *eltoltjainak részhalmazai*

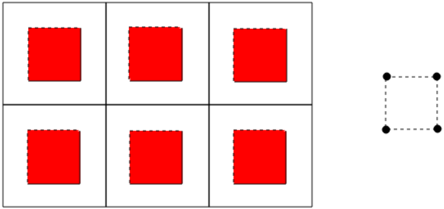
Ekkor $k_n^*(C) < k$.



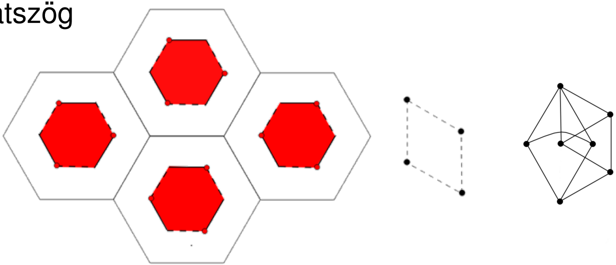


Csizmadia-Tóth konfiguráció Minkowski síkban

- négyzet



- hatszög



További kérdések

- Csizmadia-Tóth konfiguráció Minkowski síkban
- Erősen Ramsey halmazok tulajdonságai
- Alsó korlát Minkowski tér kromatikus számára