Piacok árazása matroidokkal adott kiértékelési függvények esetén

Szögi Evelin

2021. május 14.

Az előző félévben elkezdett dinamikus árazási témával foglalkoztam ebben a félévben is. Az eddig elért új eredmények a következők voltak: dinamikus árazás létezése tetszőleges számú vásárló esetén, ha mindenki igénye legfeljebb 2, illetve új és egyszerű bizonyítás a három vásárlós modell egy esetére. A tavaszi félévben végzett munka új eredményei:

- Új bizonyítás dinamikus árazás létezésére a három vásárlós modellben egy általánosabb esetre;
- Dinamikus árazás létezése a négy vásárlós modellben.

Adott egy $G = (S, T, E)$ teljes páros gráf, melyben $|S| = |T|$. Az S pontosztály felel meg a vásárlók halmazának, a T pontosztály pedig a megvásárolható tárgyak halmaza. A $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvény azt mutatja, hogy egy vásárló mennyire értékel egy terméket: $c(u, v)$ azt jelenti, hogy az u vásárló mennyire értékeli a v tárgyat. Egy adott G-beli párosítás esetén a *közjólét* (*SW: social welfare*) a párosítás súlyát jelenti. Az *optimális közjólét* egy maximális súlyú teljes párosítás súlya.

Egy $p : T \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvényt árazásnak nevezünk. Az árazás *statikus*, ha az első vásárló érkezése előtt beállítjuk az árakat és azokon a továbbiakban nem változtatunk. *Dinamikus* árazásról beszélünk, ha minden pillanatban, amikor egy vásárló elhagyta a piacot, de a következő még nem érkezett meg, megváltoztathatjuk a még meg nem vásárolt tárgyak árait. Egy adott p árazás esetén az u vásárló *hasznossága* a v tárgyból $c(u, v) - p(v)$. Egy vásárló azt a tárgyat vásárolja meg, amely maximalizálja a hasznosságot. Ha ez a maximum több helyen is felvétetik, akkor szabadon választhat. Ha ez a maximum 0, akkor dönthet úgy, hogy nem vásárol semmit. (Ha a maximum negatív, akkor nem vásárol semmit.)

A cél olyan árazás megtalálása, amely esetén a vásárlás maximális súlyú teljes párosítás élei mentén történik a vásárlók tetszőleges érkezési sorrendje mellett, azaz elérjük az optimális SW-t a vásárlók minden sorrendje esetén. Megmutatható, hogy van olyan eset, amikor nem létezik olyan statikus árazás, mely ezt biztosítaná. Viszont ilyen dinamikus árazás van. Ezt a [1] cikkben bizonyították. Az előző féléves munka egyik eredménye egy új és egyszerű bizonyítás erre a feladatra: legyen K a maximális súlyú párosítás súlya G-ben. Egerváry tétele kimondja, hogy létezik olyan $\pi : S \cup T \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ lefogó súlyozás, vagyis $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ minden uv élre, melyre $\sum \pi(v) = K$. Teljes gráfról van szó és $c \geq 0$, így π választható nemnegatívnak is. Egy ilyen π esetén minden olyan uv élre, mely benne van egy maximális súlyú párosításban, a fenti kifejezés egyenlőséggel teljesül. Megmutatható, hogy ha egy uv él nem szerepel maximális súlyú teljes párosításban, akkor az él súlyát meg tudjuk egy kicsit növelni úgy, hogy az él nem kerül be maximális súlyú teljes párosításba, vagyis a maximális súlyú teljes párosítások súlya K marad. Végezzük el ezt a kis élsúlymódosítást minden olyan élre, melyet elkerül maximális súlyú teljes párosítás. Ekkor teljesül, hogy $\pi(v) = c(uv) - \pi(u)$ minden olyan u tárgyra, melyre az uv szerepel maximális súlyú teljes párosításban és minden más esetben $\pi(v) > c(u^{'}v) - \pi(u^{'})$. Így ha egy u tárgy ára $\pi(u)$, bármelyik vásárló érkezik is először, a választása olyan él mentén fog történni, mely kiegészíthető maximális súlyú teljes párosítássá.

Az előző esetben minden vásárló egy terméket vitt el a piacról. Nézhetünk olyan eseteket is, amikor a vásárlók több terméket szeretnének. A $b : S \to \mathbb{N}$ függvényt *igényfüggvénynek* nevezzük: a v vásárló $b(v)$ darab tárgyat szeretne vásárolni. Az előző esetben b az azonosan 1 függvény volt. Most is, mint a $b \equiv 1$ esetben, minden vásárló azt a $b(v)$ terméket fogja választani, amelyek esetén legnagyobb a hasznossága. Egyelőre nem ismert, hogy tetszőleges számú vásárló és tetszőleges igényfüggvény esetén létezik-e dinamikus árazás, mely garantálja az optimális SW-t. Ismert azonban, hogy van jó dinamikus árazás, ha minden vásárló igénye 1, vagy ha legfeljebb három vásárló van tetszőleges igényekkel. Az előző félévben sikerült egy új eredményt bizonyítani: ha minden v vásárlóra $b(v) = 1$ vagy $b(v) = 2$, akkor létezik jó dinamikus árazás. A megfelelő p árvektor megtalálásához először el kellett készíteni azt a páros gráfot, melyben minden v vásárlónak $b(v)$ példánya szerepel. Ezután a korábban leírtak szerint kerestünk egy π lefogó súlyozást, vagyis egy kezdőárazást. Azonban meg lehet mutatni, hogy egy vásárlóra illeszkedhetnek olyan élpárok, amelyek ugyan külön-külön benne lehetnek egy optimális allokációban, de együtt már nem. Az ide tartozó bizonyításban szerepel az, hogy a probléma visszavezethető egy másik feladatra. A feladat az, hogy adjuk meg a tárgyak egy sorrendjét, amelyre teljesül a következő: ha a tárgyak árain a sorrend segítségével végrehajtunk kis módosításokat, akkor egyik vásárló sem fog egymást kizáró élpárok mentén vásárolni, vagyis dinamikus árazást kapunk. A továbbiakban is a bizonyítások fő része a megfelelő sorrend megkeresése lesz.

A [2] cikkből tudjuk, hogy három vásárló és tetszőleges igényfüggvények esetén létezik olyan dinamikus árazás, mellyel tetszőleges érkezési sorrend esetén elérjük az optimális SW-t. Az előző félévben erre a feladatra is sikerült egy új és egyszerű bizonyítást találni. Az előző esethez hasonlóan ez a probléma is leredukálható arra, hogy adjuk meg a tárgyak egy olyan sorrendjét, mely optimális megoldáshoz vezet, ha a vásárlók a sorrendet betartva választanak. Az erre a feladatra adott bizonyítás abban az esetben működik, ha a három vásárló igényeinek összege megegyezik a piacon szereplő tárgyak számával. Ha a piacon lévő tárgyak száma nagyobb, mint az igények összege, akkor néhány tárgy árát elég nagy értékre beállítva kizárjuk a tárgyakat a piacról, hiszen egyik vásárló sem fog belőlük nagy hasznot nyerni. Érdekesebb eset az, amikor az igények összege nagyobb, mint a tárgyak száma. A fent említett cikkben is külön kellett tárgyalniuk a szerzőknek ezt az esetet, ugyanis az ott bemutatott, "igények összege megegyezik a tárgyak számával" estre adott bizonyítás nem megy át közvetlenül erre az általánosabb esetre. Ebben a félévben az általunk talált bizonyítást is sikerült tovább csiszolni úgy, hogy működjön az általánosabb esetben is.

Először nézzük azt az esetet, amikor az igények összege megegyezik a piacon megtalálható tárgyak számával. A három vásárlós esetben is egy olyan lefogó súlyozásból indulunk ki, ahol $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$ pontosan azokra az uv élekre teljesül, amelyek szerepelnek maximális súlyú teljes párosításban. Így most is teljesül az, hogy egy vásárló haszna azon tárgyakból lesz maximális, amelyek maximális súlyú teljes párosításban szereplő élek másik végpontjaiban vannak. Ha ez a π mutatja a kezdeti árazást, akkor előfordulhat, hogy egy vásárló olyan élek mentén vásárol, amelyek külön-külön szerepelhetnek optimális megoldásban, de együtt nem. Ezt a problémát most is fel tudjuk oldani azzal, hogy a tárgyaknak egy olyan sorrendjét keressük, mely biztosítja azt, hogy ha egy vásárló a számára optimális tárgyak közül mindig a sorrendben legkorábban szereplő tárgyakat választja, akkor befejezhető optimálisan a vásárlás. Az ötlet az, hogy a vásárlók számára kijelölünk kötelező tárgyakat úgy, hogy teljesülni fog az, hogy ha egy adott vásárló elviszi a kötelező tárgyait, majd a többi tárgyból még szabadon választ annyit, hogy meglegyen az igénye, akkor optimálisan be lehet fejezni a vásárlást. Jelölje a, b, c a három vásárlót, $b(a) \geq b(b) \geq b(c)$. Ha vannak olyan tárgyak, amelyek csak egy vásárló számára optimálisak, akkor azok a sorrend elejére kerülnek, vagyis megkapják a "0" címkét. Így a vásárlók mindig ezekkel a tárgyakkal kezdik a vásárlást, ezért feltehető, hogy ilyen tárgyak nincsenek. Jelölje X azon tárgyak halmazát, amelyek optimálisak a-nak és b-nek, de c-nek nem. Hasonlóan, legyen Y azon tárgyak halmaza, amelyek csak a-nak és c-nek optimálisak, Z azon tárgyak halmaza, amelyek csak b-nek és c-nek, W azon tárgyak halmaza, amelyek mindhárom vásárlónak optimálisak. Az X-ben lévő tárgyaknak kiosztjuk az "1", "3", "4" címkéket a következőképpen: tetszőlegesen kiválasztunk $b(b)$ tárgyat és "4"-es címkét adunk nekik (ha nincs ennyi tárgy X-ben, akkor az összes X-beli "4"-es címkét kap). A megmaradt címkézetlen tárgyak közül $b(a) - b(b)$ tárgy megkapja a "3"-as címkét (ha nem maradt meg ennyi tárgy, akkor az összes címkézetlen tárgynak "3"-as címkét adunk, ha $b(a) - b(b) = 0$, akkor nem osztunk ki "3"-as címkét). Végül, ha maradt még címkézetlen tárgy, akkor azok megkapják az "1"-es címkét. Hasonlóan járunk el Y és Z címkézésénél is. Az Y-ban lévő tárgyakat szinte ugyanúgy címkézzük be, mint az X-belieket, viszont "3"-as címkék helyett "2"-es címkéket adunk, és természetesen most a $b(b)$ igényt le kell cserélni $b(c)$-re. Z árazásakor is "3"-as címkék helyett "2"-es címkéket használunk, valamint $b(a)$-t és $b(b)$-t $b(b)$ és $b(c)$-re cseréljük. A W-ben lévő tárgyak "5"-ös címkét kapnak. Nem nehéz belátni azt, hogy az a vásárló elviszi az összes "1"-es, "2"-es és "3"-as címkével ellátott $X \cup Y$-beli tárgyat (amennyiben lát ilyeneket). Ezek az ő kötelező tárgyai. Ezután szabadon választ a többi optimális tárgyból annyit, hogy $b(a)$ tárgyat vigyen összesen. Ha a b vásárló érkezik először, akkor elviszi az összes "1"-es és "2"-es címkével ellátott $X \cup Z$-beli tárgyat (ezek az ő kötelezői), ha pedig a c vásárló, akkor elviszi az összes "1"-es címkével rendelkező $Y \cup Z$-beli tárgyat. Azt sem nehéz igazolni, hogy minden optimális megoldásban a megfelelő vásárló elvisz legalább ennyi tárgyat a megfelelő halmazokból. Legvégül azt kell még igazolni, hogy egyik vásárló sem fog úgy vásárolni, hogy egy másik vásárló számára nem marad elég optimális tárgy. Ez az eset fennálása azzal lenne ellentmondásban, hogy a megfelelő vásárlók elviszik a számukra kijelölt kis címkéjű kötelező tárgyakat.

Tekintsük most azt az esetet, amikor három vásárló van, de az igényeik összege nagyobb, mint a piacon lévő tárgyak száma. Vegyünk fel annyi nem valós vagy dummy tárgyat, amely szükséges az egyenlőséghez. Az újonnan felvett dummy tárgyakat minden vásárlóval kössük össze, az így keletkezett élek súlya legyen 0. Ha ugyanúgy, mint az előző esetben, veszünk egy π lefogó súlyozást, melynél csak olyan élek lesznek pontosak, amelyek szerepelnek valamely optimális megoldásban, akkor mindazon vásárlók, amelyek valamely optimális megoldásban dummy tárgyat is kapnak, 0 hasznot fognak nyerni az összes számukra optimális valódi tárgyakból is. Az előző esethez hasonlóan, ha most is egy sorrendet keresünk a tárgyaknak, akkor előfordulhat az, hogy egy vásárló a sorrend szerint elkezd vásárolni a számára optimális tárgyakból, de amikor egy dummy tárgyhoz ér a sorrendben, akkor azt kihagyva továbbhalad. Vagyis előfordulhat, hogy számára nem optimális tárgyak is belecsúsznak a választott tárgyak közé. Első ránézésre nem világos az, hogy el lehet-e tolni úgy az árakat, hogy ha egy vásárló számára optimális tárgyakat tekintjük, akkor a dummy tárgyakat leszámítva pozitív legyen a hasznossága, de ha a dummy tárgyak nélkül kevés olyan igazi tárgy van, amely számára optimális, akkor negatív legyen a hasznossága olyan tárgyakból, amelyeket egyik optimális megoldásban sem kap meg. Ahhoz, hogy ezt biztosítani tudjuk, a kezdeti π lefogó súlyozáson is változtatni kell egy kicsit, illetve a sorrend meghatározásánál sem lesz mindegy, hogy a dummy elemek milyen címkét kapnak. Két technikai lemmára volt szükség a dinamikus árazás biztosításához, de először is fel kellett tenni, hogy egyik optimális megoldásban sem szerepelnek olyan 0 súlyú élek, amelyek egyik végpontján valódi (azaz nem dummy) tárgy van. A két állítás a következő:

- Ha v és v' két olyan vásárló, akik kaphatnak dummy elemet egy optimális megoldásban, akkor π választható úgy, hogy v és v' haszna ugyanaz a számukra optimális tárgyakból. Ez a haszon $\epsilon > 0$.
- Ha v'' olyan vásárló, aki soha sem kap dummy elemet optimális megoldásban, akkor π választható úgy, hogy v'' haszna a számára optimális tárgyakból szigorúan nagyobb, mint ϵ.

A tárgyakat (köztük a dummy tárgyakat is), besoroljuk az X, Y, Z, W halmazokba a már leírt módon. Külön kell kezelni az eseteket aszerint, hogy hány vásárló kaphat dummy-t optimális megoldásban. A legbonyolultabb az az eset, amikor két vásárló kaphat dummy tárgyat. Feltehető, hogy a dummy-k az Y halmazban vannak, vagyis a és c kaphatnak dummy-t (X, Z esetén hasonlóan megy a bizonyítás). A fenti két állítás következménye, hogy van olyan $K_1 > 0$ szám, mellyel növelve minden tárgy árát, a haszna az X, Y, W-beli tárgyakból pozitív, de a Z-beliekből már negatív. Ekkor b haszna pozitív marad az X, W, Z-beli tárgyakból a második állítás miatt, c haszna pedig az első állítás miatt marad pozitív az Y, Z, W-beli tárgyakból. Hasonlóképpen megtehetjük ezt c-vel is: van olyan $K_2 > 0$ szám, mellyel növelve minden tárgy árát c haszna Y, Z, W-ből még pozitív, de X-ből már negatív. Ugyanúgy, mint az előbb, a és b haszna pozitív marad a számukra optimális tárgyakból. A fentiek miatt van olyan $K > 0$ szám is, melyre teljesül, hogy ha minden tárgy árát K-val növeljük, akkor a és c haszna negatív lesz a számukra nem optimális tárgyakból és mindhárom vásárló haszna pozitív lesz a számukra optimálisakból, de ez a tulajdonság már nem érvényes $K + \frac{\delta}{2}$-re, vagyis $K + \frac{\delta}{2}$ már túl nagy árnövelés, azaz néhány optimális tárgyból nyert haszon már negatív értékbe megy át. Itt $\delta > 0$ egy alkalmasan megválasztott pozitív szám: b

optimális tárgyaiból nyert hasznának és a legjobb (leghasznosabb) nem optimális tárgyból nyert hasznának a különbsége. Adjunk hozzá az összes termék árához K-t. Osszuk ki a termékeknek az "1", "2", "3", "4" és "5" címkéket a korábban leírt módon. Eddig nem volt szerepe annak, hogy az Y-on belül mely tárgyak kapják az "1"-es, "2"-es és "4"-es címkéket, csak a címkék darabszámára volt korlátozás. Most viszont úgy kell kiosztani a címkéket, hogy a dummy-k minél nagyobb címkét kapjanak. Próbáljuk meg az összesnek a "4"-es címkét adni, ha ezt nem tudjuk megtenni, akkor a maradék dummy kapjon "2"-es, szükség esetén "1"-es címkét. A korábbi bizonyításban csak az volt a fontos, hogy minden vásárló vegye meg a kötelezőit, de a kötelező tárgyak után szabadon választhattak a soron következő címkével rendelkező tárgyak közül. Most az a és c vásárlókat rákényszerítjük arra, hogy minél több dummy-t vegyenek, mégpedig úgy, hogy X-ben, Y-ban és W-ben néhány tárgy árát $\frac{\delta}{2}$-vel megnöveljük. A bizonyítás többi része elég technikai jellegű, a $\frac{\delta}{2}$-vel növelt árakkal rendelkező tárgyak számát kell kiszámolni. Ha mindhárom vásárló kaphat dummy-t optimális megoldásban (vagyis W-ben vannak ezek a tárgyak), akkor a K-val való kezdeti árnövelés után már jó lesz az árazás, valamint ha csak egy vásárló kap dummy-t, akkor csak az ő szempontjából kell eltolnunk az árakat.

Eddig láttuk azt, hogy tetszőleges számú vásárló esetén létezik dinamikus árazás, ha minden vásárló igénye legfeljebb 2, és legfeljebb három vásárló esetén mindig létezik dinamikus árazás. A három vásárlóról eggyel tovább tudtunk lépni. Sikerült egy újabb eredményt bizonyítani: négy vásárló esetén is létezik dinamikus árazás tetszőleges igények mellett. Az állítást még csak abban az esetben tudjuk bizonyítani, ha a piacon lévő tárgyak száma nem kisebb az igények összegénél. Ennek a bizonyítása némiképp hasonlít a három vásárló esetére, de további trükkökre is szükség van. Mint eddig, most is egy π lefogó súlyozásból indulunk ki, és a tárgyak egy jó sorrendjét keressük. A tárgyakat most is partícionáljuk aszerint, hogy mely vásárlók számára optimálisak. Az olyan tárgyhalmazokban, amelyek két vásárló számára optimálisak, most is kijelölünk kötelező tárgyakat, melyek kis címkéket kapnak. Azonban nem biztos, hogy ha egy vásárló a kötelező tárgyai után szabadon választ, akkor be lehet fejezni optimálisan a vásárlást. Az egyik ötlet az, hogy minden vásárlópárosra nézzük meg, hogy az egyik tud-e úgy választani a kötelezői után, hogy a társának ne maradjon elég optimális tárgy. Ha nincs ilyen páros, akkor a kötelezők után szabadon választhat az első vásárló, a másik három vásárlónak jut elég optimális tárgy. Abban az esetben, ha van ilyen páros, a másik két vásárló több optimális tárgyat lát, mint az igényeik összege, vagyis az első vásárlónak mindenképp kell vinnie tárgyakat ezek közül. Tehát még újabb kötelező tárgyakat ki kell jelölni az első vásárló részére. A bizonyítás további része kicsit hosszadalmas és főleg technikai jellegű.

A továbbiakban jó lenne választ keresni arra a kérdésre, hogy tetszőleges számú vásárló és igényfüggvények esetén van-e dinamikus árazás. Általánosabb igényfüggvények esete is érdekes lehet. Ezenkívül érdemes lenne megvizsgálni, hogy mi mondható el, ha a piac kiürítése a cél, vagy ha különböző módon viselkednek a vásárlók a számukra 0 hasznossággal rendelkező tárgyaknál.

Hivatkozások

[1] Vincent Cohen-Addad, Alon Eden, Michal Feldman, and Amos Fiat. The invisible hand of dynamic market pricing, 2018.

[2] Ben Berger, Alon Eden, and Michal Feldman. On the power and limits of dynamic pricing in combinatorial markets, 2020.