Piacok árazása matroidokkal adott kiértékelési függvények esetén

Szögi Evelin
Témavezető: Bérczi Kristóf, Bérczi-Kovács Erika

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2021. május 20.

A probléma ismertetése

- Adott egy $G = (S, T, E)$ teljes páros gráf, $|S| = |T|$, S: vásárlók, T: termékek
- $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $c(u, v)$: u mennyire értékeli v-t
- **Közjólét (social welfare)**: egy M párosítás esetén $\sum_{e \in M} c(e)$, optimális közjólét: egy maximális súlyú teljes párosítás súlya
- **Árazás**: $p : T \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvény, statikus és dinamikus árazás
- **Hasznosság**: $c(u, v) - p(v)$
- Minden vásárló maximalizálni szeretné a hasznosságát

- Cél: olyan árazás megtalálása, mely esetén elérjük az optimális közjólétet a vásárlók tetszőleges érkezési sorrendje mellett
- Statikus árazás ezt nem mindig biztosítja

Állítás

Ha minden vásárló egy terméket szeretne vásárolni, akkor van jó dinamikus árazás.

- Előző félév egyik eredménye: új és egyszerű bizonyítás, ötlet: π lefogó súlyozás mutatja az árakat

Más igényfüggvények

- A $b : S \to \mathbb{N}$ **igényfüggvény** mutatja, hogy a vásárlók hány terméket szeretnének vásárolni
- Nem ismert: tetszőleges igényfüggvény esetén tetszőleges számú vásárló mellett van-e jó dinamikus árazás. Azonosan 1 igényfüggvény esete, legfeljebb 3 vásárló esete ismert.

Minden igény ≤ 2

Új eredmény az előző félévből:

Állítás

Ha minden igény 1 vagy 2, akkor van jó dinamikus árazás.

- Ötlet: hasonlóan π lefogó súlyozásból indulunk ki. Veszélyes élhalmazok: két él egyszerre nem szerepelhetnek optimális megoldásban. Szép struktúrájuk van, elég egy sorrendet felállítani közöttük. Indukciót lehet alkalmazni.

3 vásárló esete

Állítás

3 vásárló esetén tetszőleges igényfüggvények mellett van jó dinamikus árazás.

- Előző félévben új és egyszerű bizonyítás, ötlet: hasonlóan π lefogó súlyozásból indulunk ki. Csak az optimális élekkel kell foglalkozni. Ismét egy jó sorrendet kell adni a tárgyaknak.
- Kötelező tárgyak a sorrend elejére
- Feltesszük: minden optimális megoldás használ minden tárgyat

3 vásárló, általánosabb eset

- A félév új eredménye: elhagyható a korábbi feltevés
- Legszűkebb optimális megoldásokat nézünk
- Dummy tárgyakat veszünk fel 0 súlyú élekkel
- Szükség van egy lemmára:

Lemma

1. Ha v és v' két olyan vásárló, akik kaphatnak dummy elemet egy optimális megoldásban, akkor π választható úgy, hogy v és v' haszna ugyanaz a számukra optimális tárgyakból. Ez a haszon $\epsilon > 0$.

2. Ha v'' olyan vásárló, aki soha sem kap dummy elemet optimális megoldásban, akkor π választható úgy, hogy v'' haszna a számára optimális tárgyakból szigorúan nagyobb, mint ϵ.

3 vásárló, általánosabb eset

- Három eset: 1, 2 vagy 3 vásárló kap dummy tárgyat
- Legérdekesebb: 2 vásárló kap dummy-t
- 1. lépés: toljuk el az árakat egy $K > 0$ számmal úgy, hogy minden dummy-t kapó vásárló haszna negatív legyen a számára nem optimális tárgyakból
- 2. lépés: néhány tárgy árát $\delta > 0$-val növelve elérjük, hogy egy dummy-t kapó vásárló ne vigyen sok igazi tárgyat, csak amennyit mindenképp el kell vinnie egy opt. megoldásban

4 vásárló esete

- Használjuk a korábbi feltevést
- Új eredmény:

Állítás

4 vásárló esetén tetszőleges igények mellett van dinamikus árazás.

- Ötlet: π lefogó súlyozás, sorrendiség, kötelező tárgyak a 3 vásárlós esethez hasonlóan
- Minden vásárlópárosra meg lehet nézni, hogy az egyik tud-e úgy vásárolni a kötelezői után, hogy a társának ne maradjon elég
- Egy veszélyes páros mentén szétbontható a feladat

Továbbiak

- 4 vásárlós esetben a feltevés elhagyása
- Tetszőleges számú vásárló és igények esetén van-e dinamikus árazás?
- Általánosabb igényfüggvények
- Piac kiürítése a cél, 0 vagy negatív súlyú élek