Kétfázisú robusztus optimalizálás

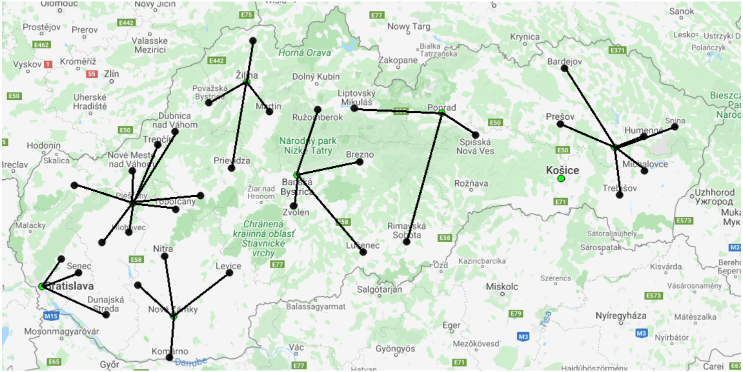
Marosvári Ágnes

2021. május 20.

Bevezető

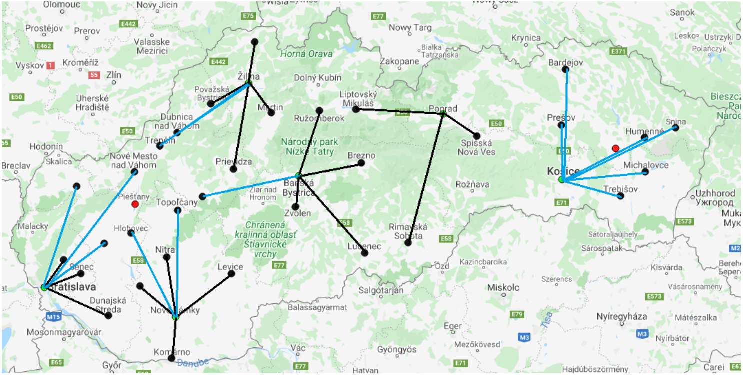
- Kétszeri optimalizálás: első és második fázis
- Egy robusztus megoldás a bizonytalan halmaz minden pontja esetén megoldás marad
- Ebben a félévben: p-median probléma

Példa



ábra: Normál működés a megadott paraméterek mellett

Példa



ábra: k=2 gyár leállása után

Általános modell

$$\min_{y \in S_y} cy + \max_{u \in U} \min_{x \in F(y,u)} bx$$

$$Ay \geq d$$

$$F(y,u) = \{x \in S_x : Gx \geq h - Ey - Mu\}$$

$$S_y \subseteq \mathbb{R}^n_+, \; S_x \subseteq \mathbb{R}^m_+$$

p-median modell

$$(1-\varrho)\min\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}d_i x_{ij} + \varrho \max_{z}\min_{(w,q)}\left(\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}(1-\theta z_i)d_i w_{ij} + \sum_{i\in I} M(1-\theta z_i)d_i q_i\right) \quad (1)$$

$$x_{ij} \le y_j \quad \forall i,j \quad (2)$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (3)$$

$$\sum_j y_j = p \quad (4)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j, \quad x_{ij} \ge 0 \quad \forall i,j \quad (5)$$

$$\sum_j z_j \le k \quad (6)$$

$$z_j \in \{0,1\} \quad \forall j \quad (7)$$

$$w_{ij} \le 1 - z_j \quad \forall i,j \quad (8)$$

$$w_{ij} \le y_j \quad \forall i,j \quad (9)$$

$$\sum_j w_{ij} + q_i = 1 \quad \forall i \quad (10)$$

$$w_{ij} \ge 0 \quad \forall i,j, \quad q_i \ge 0 \quad \forall i \quad (11)$$

A C&CG algoritmus

1. Legyen az alsó korlát $LB = -\infty$, a felső korlát $UB = +\infty$, $n = 1$.
2. Oldjuk meg a mester problémát (MP):

$$\min\ (1-\varrho)\sum_i\sum_j c_{ij}d_ix_{ij} + \varrho\eta$$

$$x_{ij} \le y_j \quad \forall i,j$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_j y_j = p$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \forall i,j, \quad y_j \in \{0,1\} \quad \forall j$$

$$\eta \ge \sum_i\sum_j c_{ij}(1-\theta z_i^l)d_iw_{ij}^l + \sum_i M(1-\theta z_i^l)d_iq_i^l \quad \forall l = 1,..,n-1$$

$$\sum_j w_{ij}^l + q_i^l = 1 \quad \forall i,\ \forall l = 1,..,n-1$$

$$w_{ij}^l \le 1 - z_j^l \quad \forall i,j,\ \forall l = 1,..,n-1$$

$$w_{ij}^l \le y_j \quad \forall i,j,\ \forall l = 1,..,n-1$$

$$w_{ij}^l \ge 0 \quad \forall i,j,\ \forall l = 1,..,n-1, \quad q_i^l \ge 0 \quad \forall i,\ \forall l = 1,..,n-1, \quad \eta \ge 0$$

3. Állítsuk be LB-t a kapott optimumra, és legyen (y^n, x^n) MP optimális megoldása, ezt használva oldjuk meg a következő részproblémát (SP):

$$\max_{z} \min_{(w,q)} \sum_i \sum_j c_{ij}(1-\theta z_i) d_i w_{ij} + \sum_i M(1-\theta z_i) d_i q_i$$

$$w_{ij} \le 1 - z_j \quad \forall i,j$$

$$w_{ij} \le y_j^n \quad \forall i,j$$

$$\sum_j w_{ij} + q_i = 1$$

$$\sum_j z_j \le k$$

$$w_{ij} \ge 0 \quad \forall i,j, \quad q_i \ge 0 \quad \forall i, \quad z_j \in \{0,1\} \quad \forall j$$

4. Legyen SP optimális megoldásának értéke $\mathcal{Q}(y^n)$, és az optimális z értéke pedig z^n. Legyen $UB = \min\{UB,\ (1-\varrho)\sum_i \sum_j c_{ij} d_i x_{ij}^n + \varrho \mathcal{Q}(y^n)\}$.

5. Ha $UB - LB \le \epsilon$, akkor álljunk meg. Különben vegyünk MP-hez új (w^n, q^n) változókat a rájuk vonatkozó korlátokkal együtt z^n érték mellett. Legyen $n = n+1$, és menjünk a 2. lépéshez.

SP linearizálása

1. Belső minimalizálás helyett duális és komplementaritási feltételek
2. Duális felírása és a két maximum összeolvasztása

$$\max_{z,u,v,s} \sum_i \sum_j (1 - z_j) u_{ij} + \sum_i \sum_j y_j^n v_{ij} + \sum_i s_i$$

$$u_{ij} + v_{ij} + s_i \leq c_{ij} d_i (1 - \theta z_i) \quad \forall i, j$$

$$s_i \leq M d_i (1 - \theta z_i) \quad \forall i$$

$$\sum_j z_j \leq k$$

$$u_{ij} \leq 0 \quad \forall i, j, \quad v_{ij} \leq 0 \quad \forall i, j, \quad z_j \in \{0, 1\} \quad \forall j$$

Az így kapott program linearizálható új $U_{ij} = u_{ij} z_j$ változókkal.

Futási eredmények, tapasztalatok

Az algoritmus implementálása FICO Xpress + Mosel környezetben történt.

$\lvert I \rvert \times \lvert J \rvert$	p	ϱ	k	θ	Futásidő (mp)	Iterációk	Futásidő (mp)	Iterációk
50x50, 100x25	$\lvert J \rvert/5$	0.1	1	-1	3.348	4	1.851	3
				0	4.509	5	1.595	3
				1	0.746	2	1.685	3
			2	-1	39.016	13	1.966	3
				0	81.567	14	2.717	4
				1	6.157	6	1.356	4
		0.5	1	-1	129.93	15	1.899	3
				0	101.231	14	1.788	3
				1	8.658	6	6.236	5
			2	-1	T	-	18.923	8
				0	T	-	15.662	7
				1	T	-	17.646	8

Köszönöm a figyelmet!