Egyéni kutatómunka 2 (Rendezett halmazok)

Seress Dániel

2020. december 8.

Az [1] könyv 6., rendezett halmazokról szóló fejezetéből megoldottam a feladatok egy részét. Az alábbiak a megoldások.

1. Legyen $\langle A, < \rangle$ rendezett halmaz, és $a_0, a_1, a_2, ...$ végtelen sok különböző eleme.

2. Minden megszámlálható rendezett halmaz beágyazható $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$-be.

Ha egy megszámlálható rendezett halmaz önmagában sűrű és nincs legkisebb és legnagyobb eleme, akkor hasonló $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$-hez.

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ekkor $I \cap \mathbb{Q}$ önmagában sűrű megszámlálható rendezett halmaz, amelynek nincs legkisebb és legnagyobb eleme. Ezért $\langle I \cap \mathbb{Q}, < \rangle$ hasonló $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$-hez. Tehát $\langle I \cap \mathbb{Q}, < \rangle$ teljessé tétele hasonló $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ teljessé tételéhez.

$\langle I \cap \mathbb{Q}, < \rangle$ teljessé tétele $\langle I, < \rangle$. Tehát $\langle I, < \rangle$ hasonló $\langle \mathbb{R}, < \rangle$-hez.

3. $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$ rendezett uniója, ahol $\mathbb{N}$ a kisebb.

4. $\mathbb{R}$ a szokásos rendezéssel $\mathbb{Z}$ és $[0, 1[$ lexikografikus szorzata. ($\mathbb{Z}$ a külső, $[0, 1[$ a belső tényező.)

$[0, 1[$ és $\mathbb{Z}$ fordított sorrendű lexikografikus szorzata: $\mathbb{Z}$ a belső, $[0, 1[$ a külső tényező.

5. A visszairány: Ha egy rendezett halmaz minden elem általi kezdőszelete véges, akkor minden elem általi kezdőszelete jólrendezett, ezért jólrendezett. Egy ilyen jólrendezett halmaz hasonló $\mathbb{N}$-hez.

6. Ez a tulajdonság invariáns a duális képzésére.

Ha jólrendezett, akkor $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ vagy a duálisa minden végtelen rendezett halmazba beágyazható. Ezért minden ilyen tulajdonságú rendezett halmaz hasonló $\mathbb{N}$-hez vagy a duálisához.

7. A visszairány: egy ilyen rendezett halmaz egy 5. feladatbeli tulajdonságú rendezett halmaznak a duálisával való rendezett uniója, ahol a duális a kisebb. Tehát hasonló $\mathbb{Z}$-hez.

8. Az 5. és 7. feladat alapján $\mathbb{N}$, a duálisa és $\mathbb{Z}$.

9. $\mathbb{Q}$ nemüres valódi kezdőszeletei $\mathbb{R}$ elemei. (A 90. feladat $\kappa = \aleph_0$-lal.)

10. A 90. feladat $\kappa = c$-vel.

15. Ekvivalens azzal, hogy kontinuum sok páronként nem hasonló megszámlálható rendezett halmaz van.

17. Vegyünk egy Hamel-bázist, és osszuk két, egyenként kontinuum számosságú részre. Tekintsük azt a lineáris alteret, amelynek az egyik rész bázisa. Ez

rendezés-izomorf $\mathbb{R}$-rel (?).

26. $(0,1)$-beli diadikusak, illetve racionálisak.

31. A természetes számok szokásos rendezése éppen a 2-es számrendszerbeli alakjuk antilexikografikus rendezése.

32. $(0,1)$-beli diadikusak

62. Tegyük fel, hogy az $\langle X, <\rangle$ végtelen rendezett halmaznak nincs önmagához hasonló valódi részhalmaza, és a számossága κ.

Ekkor a 61. feladat állítása szerint $\langle X, <\rangle$ nem megszámlálható ($\kappa > \aleph_0$), sőt minden megszámlálható intervalluma véges. Ekkor minden eleme eleme egy maximális véges intervallumnak. Legyen az önmagában sűrű magja $\langle Y, <\rangle$. Ez szintén κ számosságú, és $\langle Y, <\rangle$ minden megszámlálható intervalluma triviális.

Feltehetjük, hogy κ a legkisebb olyan számosság, amelyre létezik ilyen számosságú ilyen tulajdonságú rendezett halmaz.

Tekintsük a 2^κ diszkrét, ill. komplett direkt hatványt a lexikografikus rendezéssel. A diszkrétben bármely két pont között κ sok másik pont van.

65. A sűrűvé tétel.

66. A teljessé tétel.

67. A teljessé tétel megtartja (kiterjeszti) az izomorfizmust.

68. A sűrűvé tétellel megkapjuk Q-t, a teljessé tétellel megkapjuk R-et.

90. Legyen κ végtelen számosság. Ekkor a 2^κ (mint rendezett halmazok) lexikografikus hatvány számossága 2^κ (mint számosságok).

Tekintsük a 2^κ (mint rendezett halmazok) lexikografikus hatvány azon elemeit, amelyeknek csak véges sok komponense nem 0. Ezek κ sokan vannak, és ezek halmazának a teljessé tétele az egész 2^κ. (Itt nem csak ω rendszámú, hanem tetszőleges $\lambda < \kappa$ rendszámú konvergens sorozatokat használunk a kezdőszeletekhez.)

91. A 90.-ből következik az elem általi kezdőszeletek beágyazásával.

Hivatkozások

[1] P. Komjáth, V. Totik, Problems and Theorems in Classical Set Theory, Springer (2006), 23-31