

A középgörbületi folyam a síkon és a térben

Egyéni kutatómunka 2 beszámoló

Hallgató: Németh Álmos

Témavezető: Csikós Balázs

2020.12.08.

Téma leírása

A félév elején a középgörbületi folyammal kapcsolatos alapvető eredmények megismerése után áttekintettük a kapcsolódó nyitott kérdések egy részét, majd ezek közül egy érdekes sejtést kiválasztottunk és ezt jártuk körül a félév második felében.

A középgörbületi folyam euklideszi térbe immertált 1-kodimenziós hiperfelület olyan 1-paraméteres deformációja (a paraméterre általában időként hivatkoznak), mely a felületre normális irányú és annak középgörbületétől függ. A síkon ez a *görberövidítő folyam*, mely során egy síkgörbét úgy változtatunk, hogy a lehető leggyorsabban csökkenjen a hossza. Ez a karakterizáció az általános esetben is teljesül, ha rögzítjük hogy a deformáció által indukált teljes elmozdulás mértéke mekkora, akkor ezek közül a középgörbületi folyam során csökken a leggyorsabban a hiperfelület (lokális) területe. Azokat a felületeket, melyeket csak a területük növelésével lehet perturbálni és amiket emiatt a folyam helybenhagy, *minimálfelületeknek* nevezzük. Gyakori jelenség, hogy a folyam során szingularitás jelenik meg valamely pont(ok)ban, azaz a klasszikus megoldás valamiért nem folytatható tovább. A középgörbületi folyammal kapcsolatos egyik legfontosabb probléma a fellépő szingularitások megértése, és annak tanulmányozása, hogy milyen módokon lehet ezeken átlépve folytatni a folyamatot. Nevezetes eredmény [3], hogy ha a szinguláris időpillanatban ránagyítunk a problémás pontra, akkor az így kapott felület a nagyítás során bizonyos feltételek mellett aszimptotikusan a folyam egy ún. *önhasonló megoldásához* fog tartani, azaz egy olyan felülethez mely az alakját nem változtatva húzódik össze egy pontba. Ezek közül kevés beágyazott felület ismert, de az 1992-ben megjelent [1] cikkben Sigurd B. Angenent igazolta egy beágyazott önhasonló forgásfelület létezését, mely topológiailag egy tórusz. Ennek unicitása máig nyitott kérdés, így ennek a problémának a megértésével kezdtünk el foglalkozni.

A középgörbületi folyam és az önhasonló megoldások

A középgörbületi folyam a Ricci-folyamhoz hasonlóan egy geometriai folyam, mely során egy Riemann-sokaságot időben deformálunk annak geometriájától függően. Fontos különbség azonban, hogy míg a Ricci-folyam csak a sokaság belső geometriájától függ, addig a középgörbületi folyam esetén immertált hiperfelületet változtatunk, annak külső geometriája alapján. A folyam pontos definíciójához legyen M egy n dimenziós sima sokaság és legyen $\varphi_{init}: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ egy sima immerzió. Azt mondjuk, hogy a $\varphi_t: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ($t \in [0, T)$) sima immerziók 1-paraméteres családjának megoldása a középgörbületi folyamnak, ha

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(p), \nu(p, t) \right\rangle = H(p, t) & (\forall (p, t) \in M \times [0, T)), \\ \varphi_0 \equiv \varphi_{init}, \end{cases}$$

ahol $H(p, t)$ és $\nu(p, t)$ rendre a $\varphi_t(M)$ hiperfelület $\varphi_t(p)$ -beli középgörbülete (tehát a főgörbületek összege) és normális vektormezeje, $T \leq +\infty$ pedig a maximális időpont amíg a folyamannak létezik megoldása. Azt mondjuk, hogy a $\{\varphi_t\}_{t \in [0, T)}$ megoldás *önhasonló*, ha létezik olyan $f: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvény, melyre

$$\varphi_t(M) = f(t) \cdot \varphi_{init}(M).$$

(Ezen definíció szerint az önhasonló megoldások az origóba tartanak ha $t \rightarrow T$, nyilván ez egy eltolással minden esetben elérhető.) Ismert, hogy ez csak az $f(t) = \sqrt{2(T-t)}$ függvénnyel lehetséges, valamint hogy a $\varphi_t(M) = \sqrt{2(T-t)} \cdot \varphi_{init}(M)$ immerzió-sereg pontosan akkor lesz önhasonló megoldás, ha

$$H(p, 0) = -\frac{1}{2T} \langle \varphi_{init}(p), \nu(p, 0) \rangle.$$

Az általánosság elvének megsértése nélkül a továbbiakba feltesszük, hogy $T = 1$. A Huisken-féle monotonitási formulából [3] következik, hogy a fenti feltétel ekvivalens azzal, hogy a $\varphi_{init}(M)$ immerzió stacionárius pontja az

$$A(X) = \int_M e^{-\frac{\|X(p)\|^2}{4}} d\mu(p)$$

funkcionálnak (amely tetszőleges $X: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ immerzióra értelmes és $d\mu$ jelöli az immerzió által indukált mértéket az M sokaságon).

A (\mathbb{H}, g_{Ang}) Riemann-sokaság

Jelölje $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ a felső félsíkot és tegyük fel, hogy $\varphi_{init}(M)$ egy forgásfelület, vagyis $M = S^{n-1} \times (a, b)$. Ha $(x(s), r(s)) \in \mathbb{H}$ ($s \in (a, b)$) a kezdeti felület meridiángörbéje, akkor

$$\varphi_{init}(p) = (x(s), r(s)\omega) \quad (\forall p = (\omega, s) \in M).$$

A forgásfelület pontosan akkor lesz stacionárius pontja az A funkcionálnak, ha az $\{(x(s), r(s)) : s \in (a, b)\}$ görbe egy geodetikus a (\mathbb{H}, g_{Ang}) Riemann-sokaságban, ahol \mathbb{H} pontjait (x, r) -el paraméterezve

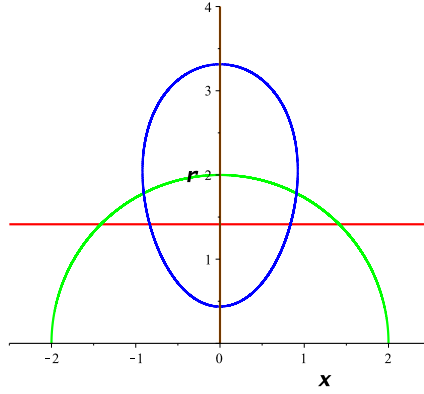
$$g_{Ang}(x, r) = r^{2(n-1)} e^{-\frac{x^2+r^2}{2}} (dx^2 + dr^2).$$

Ennek oka, hogy egy ismert jellemzésük alapján a geodetikusok minimalizálják az

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b (g_{Ang})(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

energia-funkcionált (ahol $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ egy tetszőleges görbe). A pontos levezetés az [1] cikkben olvasható.

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltesszük hogy $n = 2$, azaz a geodetikusok 3-dimenziós euklideszi térbe immertált forgásfelületeknek felelnek meg a következőképpen: Ha \mathbb{R}^3 -ban a szokásos koordinátangelyekre az x, y, r elnevezéseket használjuk (r a felfele mutató tengely), akkor a fentiek alapján minden (\mathbb{H}, g_{Ang}) -beli geodetikust az x -tengely mentén megforgatva egy immertált forgásfelületet kapunk, mely önhasonló megoldását adja a középgörbületi folyamannak. Ha a geodetikus zárt, akkor topológiailag a felület egy



A (\mathbb{H}, g_{Ang}) Riemann-sokaság nevezetes geodetikus görbéi, késsel a $\gamma_{\mathbb{T}}$

tórusz lesz, ha pedig egyszerű, akkor egy beágyazást kapunk. Az [1] cikkben Angenent ezzel a módszerrel igazolta az önhasznós tórusz létezését. A továbbiakban erre a $\gamma_{\mathbb{T}}$ jelölést alkalmazzuk, az x -tengely körüli megforgatásával kapott beágyazott tóruszra pedig *Angenent-tóruszként* fogunk hivatkozni.

Ha $\gamma = (x, r): [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ a sokaság egy geodetikusa, akkor a következő differenciálegyenlet rendszer teljesül az x, r koordinátáfüggvényekre:

$$\begin{cases} x'' = \frac{x}{2}((x')^2 - (r')^2) + \left(r - \frac{2}{r}\right)x'r', \\ r'' = \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{2}\right)((x')^2 - (r')^2) + xx'r'. \end{cases}$$

Ez egy másodrendű nemlineáris rendszer, melynek az egzakt megoldásai nem ismertek (így például $\gamma_{\mathbb{T}}$ sem adható meg képlettel, csak numerikus közelítések segítségével lehet kirajzolni). Fontos megjegyezni, hogy ez a differenciálegyenlet rendszer a 2 dimenziós \mathbb{H} sokaság 4 dimenziós $T\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ érintőnyalábjában egy autonóm differenciálegyenlet, hiszen $T\mathbb{H}$ pontjai megadhatók (p, v) alakban, ahol $p \in \mathbb{H}, v \in T_p\mathbb{H}$ és ha $\gamma = (x, r)$ egy olyan geodetikus, amely p -ből indul v kezdősebességgel, akkor ez felfogható egy $T\mathbb{H}$ -beli (x, r, x', r') görbéként, melyre teljesül a fenti differenciálegyenlet és a (p, v) pontból indul.

A feldolgozott irodalomban fontos szerepet kapott a $\gamma_{\mathbb{T}}$ geodetikus mellett az r tengely, az $r = \sqrt{2}$ egyenletű egyenes, valamint a 2 sugarú félkörív, melyek szintén a sokaság geodetikusai, az általuk meghatározott önhasznós megoldást adó forgásfelületek pedig rendre az $y = 0$ egyenletű sík, egy beágyazott henger, valamint egy beágyazott gömb (ezen alakzatok eltoltjai és átskálázott változatai a $T = 1$ feltétel, valamint az origóba való tartás feltevése miatt nem jelennek meg.)

Fontos még megjegyezni, hogy a sokaság Gauss-görbülete mindenhol pozitív, valamint alulról korlátos is, továbbá az x tengelyhez, közelében, valamint az origótól távol $+\infty$ -be tart.

Elvégzett munka

A félét Carlo Mantegazza *Lecture Notes on Mean Curvature Flow* c. jegyzetének [2] elolvasásával kezdtük. Ebben szerepelnek a középgörbületes folyamat kapcsolatos alapvető eredmények (rövidtávú megoldás létezése, a deformálódó hiperfelület geometriai mennyiségeinek megváltozása, a maximumelv és annak alapvető következményei), valamint a

folyam során fellépő szingularitások analízise. Itt fontos megjegyezni, hogy kétfajta szingularitást különböztethetünk meg: Ha $\|A(p, t)\|$ jelöli a $\varphi_t(M)$ felület $\varphi_t(p)$ -beli második alapformájának normáját, akkor ha

$$\max_{p \in M} \|A(p, t)\| \leq \frac{C}{\sqrt{2(T-t)}}$$

valamely $C > 1$ konstansra, akkor azt mondjuk, hogy a szingularitás I-es típusú, ellenkező esetben II-es típusú szingularitásról beszélhetünk. Az I-es típusú szingularitások esetén fontos eredmény, hogy ha a szingularitás közelében felnagyítjuk a felületet, akkor aszimptotikusan egy önhasonló megoldását kapjuk a folyamannak [3].

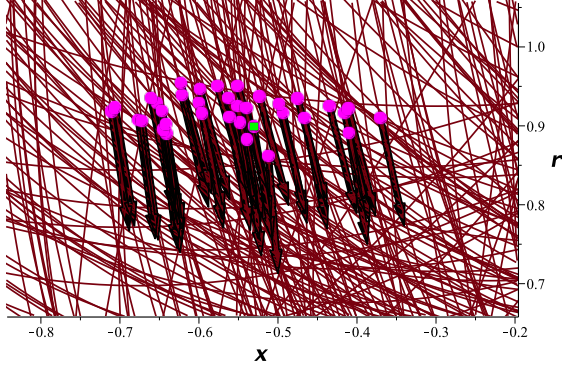
Az önhasonló megoldásokkal kapcsolatosan merült fel az Angenent-tórusz, mint az egyik alapvető nemtriviális beágyazott ilyen felület és ezzel kapcsolatosan az egyértelműség kérdése. Angenent eredeti bizonyítása a [1] cikkben található és a fentebb ismertetett Riemann-sokaság geodetikus görbéinek részletes analízisén, valamint a geodetikusok kezdeti feltételektől való folytonos függésén alapszik. Ettől lényegesen eltérő bizonyítást olvashatunk a 2018-as [7] cikkben, ahol egy módosított görberövidítő folyamat segítségével igazolják az egyszerű zárt geodetikus létezését. A problémához kapcsolódnak még a [4] és [5] cikkek is, előbbiben egy immertált S^n megoldás, utóbbiban pedig végtelen sok S^n , \mathbb{T}^n , \mathbb{R}^n és $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ megoldások létezését igazolják, szintén a (\mathbb{H}, g_{Ang}) sokaság geodetikusainak vizsgálatával. Továbbá ezen eredmények összefoglalása és az alapvető bizonyítási ötletek leírása megtalálható a [6] survey-cikkben, ahol emellett az unicitással kapcsolatos sejtést is megfogalmazzák.

A témával kapcsolatos cikkekből az derült ki, hogy a fontos eredmények igazolása nagyrészt a megoldások lokális viselkedésének megértésén múlik, ezért Maple környezetben vizsgáltuk azok numerikus közelítéseinek ábráit. Ezek tanulmányozásával próbáltuk megsejteni, hogy mely tulajdonságuk lehet az, aminek segítségével közelebb juthatunk az egyértelműség igazolásához. Ezzel kapcsolatban több sejtést is megfogalmaztunk, melyekről később írunk részletesen.

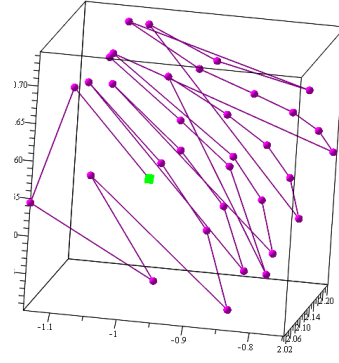
Integrálhatóság vizsgálata

Tekintsük a geodetikus differenciálegyenletet egy autonóm egyenletnek a 4-dimenziós $T\mathbb{H}$ érintőtéren. Ekkor ennek egy első integrálja az energia, ami annyit tesz, hogy ha $\{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) : t \in [a, b]\}$ egy megoldása az egyenletnek (vagyis γ egy geodetikus \mathbb{H} -ban), akkor a $\|\dot{\gamma}(t)\|_{g_{Ang}}^2$ energia nem függ t -től (ez nyilvánvaló, hiszen a geodetikusokat ívhossz szerint paraméterezzük). Az energia tehát egy olyan mennyiség mely a megoldások mentén nem változik. Ha létezne egy másik ilyen invariáns mennyiség amely független az energiától (azaz a gradiens vektoraik $T\mathbb{H}$ egy sűrű nyílt halmazán lineárisan függetlenek), akkor azt mondanánk, hogy a rendszer *integrálható*. Ismert, hogy ekkor a két első integrál közös szintfelületei (tehát azok a ponthalmazok, melyeken mindkét mennyiség konstans), amennyiben kompaktak, diffeomorfak egy 2-dimenziós ún. *invariáns tóruszal*. A megoldások tehát ebben az esetben egy $T\mathbb{H}$ -ba beágyazott tóruszra esnek, a \mathbb{H} -beli γ geodetikus pedig ennek a megoldásgörbének az első két koordinátára való levetítése. Ha ez teljesülne, akkor nagyban megkönnyíthetné a geodetikusok viselkedésének megértését, és a sejtés megválaszolását.

A geodetikus görbék kirajzolása alapján azt lehetett sejtteni, hogy az integrálhatóság akár teljesülhet, így megpróbáltuk numerikus teszteléssel ezt leellenőrizni. Ha veszünk $T\mathbb{H}$ -ban



A zölddel jelölt p pont közelébe visszatérő pontok és sebességeik



A 3 dimenziós kiegészítő hiperfelülettel vett metszéspontjaik $T\mathbb{H}$ -ban

egy (p, v) rögzített pontot és ebből indítunk egy megoldást, akkor amennyiben ez egy invariáns tóruszon halad és a megoldás sokszor visszatér (p, v) közelébe (ami a \mathbb{H} -beli geodetikusok nyelvén annyit tesz, hogy a megfelelő vetítéssel előállított geodetikus visszatér p egy környezetébe és ott v -hez közeli sebességgel halad), azt várjuk, hogy a görbe (p, v) -beli sebességvektorára merőleges kiegészítő 3 dimenziós Σ hipersíkkal vett metszéspontjai a visszatérő görbének egy sima görbe, a Σ és az invariáns tórusz metszévonalán helyezkednek el.

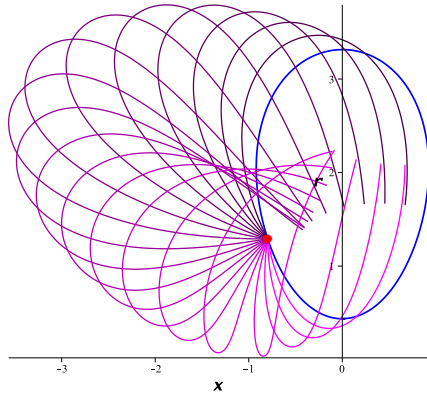
A numerikus vizsgálat azonban nem támasztotta alá ezt, a metszéspontok nagyon szét-szórtan helyezkednek el az ábrák alapján, így azt sejtjük, hogy nincs még egy első integrál. Ennek az igazolása is érdekes kérdés lehet, azonban a kitűzött feladat megoldásában nem nyújtana segítséget, így ebbe az irányba most nem vizsgálódtunk tovább.

Numerikus vizsgálat és sejtések

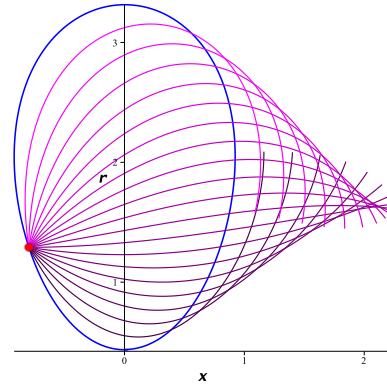
A geodetikusok képeinek tanulmányozása során során felmerült sejtésként, hogy a sokaság bármely két zárt geodetikus metszi egymást. Ennek alapja az volt, hogy ha kiválasztunk a γ_1, γ_2 zárt geodetikusokon a távolságot minimalizáló $p_1 \in \gamma_1, p_2 \in \gamma_2$ pontpárt és $p_1 \neq p_2$, akkor ha van köztük minimális geodetikus, akkor az merőleges lesz mindkét görbére. Válasszunk ki γ_1 -en egy p_1 -hez közeli q_1 pontot és ebből indítsunk ki merőlegesen egy geodetikust. Ha q_2 jelöli ennek a γ_2 -vel vett metszéspontját, akkor a kezdeti feltételektől való folytonos függés miatt ha a $d(p_1, q_1)$ távolság elég kicsi, akkor q_2 közel lesz p_2 -höz. Ha most tekintjük a $p_1 q_1 q_2 p_2$ geodetikus négyszöget, akkor a Gauss-Bonnet tételt erre felírva azt kapjuk, hogy

$$\int_{\text{int}(\text{négyszög})} K = \theta - \frac{\pi}{2},$$

ahol θ a négyszögben a q_2 pontnál lévő szög. Mivel a K Gauss-görbület pozitív, ezért $\theta > \frac{\pi}{2}$, amiből ki lehet hozni, hogy a γ_1 -et és γ_2 -t összekötő geodetikus mégsem minimalizálja a két görbe távolságát. Ez a gondolatmenet sajnos nem alkalmazható általánosan, mivel a sokaságunk nem teljes, így nem feltétlenül létezik bármely két zárt geodetikus között egy minimális hosszúságú összekötő görbe. Az viszont hasonló módszerrel igazolható, hogy olyan nem történhet hogy egy zárt geodetikus tartalmaz egy másikat. Fontos megjegyezni, hogy ugyan ez a bizonyítás nem működik minden esetben, de elképzelhető hogy esetleg valahogy máshogy lehetne igazolni, hogy a zárt geodetikusok metszik egymást.



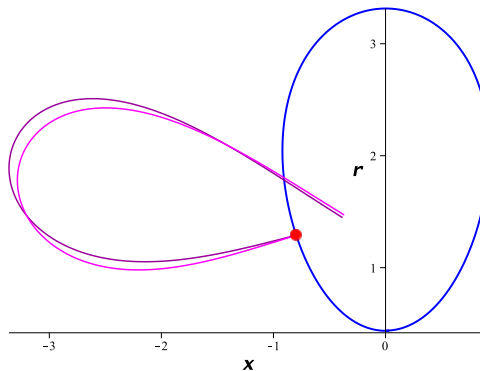
Kifelé induló geodetikusok



Befelé induló geodetikusok

A számítógépes vizsgálatok során nem találtunk olyan geodetikust, mely ne metszette volna a $\gamma_{\mathbb{T}}$ görbét vagy a félkörívet, így a fenti sejtés alapján, valamint mivel önmagában is fontos részeredmény lehet, elkezdtünk azokkal a geodetikusokkal foglalkozni amelyek ezen görbékről indulnak. A tórusz-görbe egy rögzített p pontjából minden irányba indítva geodetikusokat azt figyeltük meg, hogy van a görbén két olyan k_1, k_2 pont, hogy a p -ből a tórusz-görbéről kifelé eső irányba indított geodetikusok ha újra metszik $\gamma_{\mathbb{T}}$ -t, akkor vagy a k_1p , vagy pedig a pk_2 geodetikus szakaszon mennek keresztül, ha pedig a görbe belseje felé indul egy geodetikus akkor az a p_1p_2 szakaszon át távozik a görbe által bezárt síkrészből. Ezek a pontok valószínűleg a $\gamma_{\mathbb{T}}$ görbén a p -hez tartozó első *konjugált pontok* (aszerint hogy milyen irányba haladunk a geodetikuson). Megfigyeltük emellett azt is, hogy az általunk kirajzolt görbék mindegyikére teljesül, hogy ha egy kifelé indított geodetikus visszatér a tórusz-görbére, akkor ha az ellentétes (tehát π -vel elforgatott) irányba is kiindítunk geodetikust, akkor ez a két görbe metszeni fogja egymást a $\gamma_{\mathbb{T}}$ által körülzárt síkrészen. Mivel a két görbe ugyanannak a geodetikusnak a két része, ezért ezt úgy lehet egyszerűbben megfogalmazni, hogy ha egy geodetikus 3-szor metszi $\gamma_{\mathbb{T}}$ -t (és nem egyezik meg vele), akkor közben legalább 1-szer önmagát is metszi. Ha sikerülne ezt az állítást igazolni, akkor már csak olyan egyszerű zárt megoldások létezését kéne megcáfolni amelyek egyáltalán nem metszik $\gamma_{\mathbb{T}}$ -t.

Ezen a ponton a kirajzolt ábrák alapján úgy tűnt, hogy az is teljesül, hogy a kiinduló geodetikusok $\dot{\gamma}(p)$ -vel bezárt szögétől monoton módon függ az első visszatérés metszéspontja. Később azonban találtunk a kifelé induló geodetikusok között ellenpéldát, léteznek ugyanis olyanok amik kétszer metszik egymást a tórusz-görbén kívül, míg a legtöbb esetben a metszéspontok száma csak egy. Világos, hogy emiatt a monotonitás nem teljesülhet



Egymáshoz közeli kifelé induló geodetikusok, melyek kétszer metszik egymást.

általánosan, az viszont még elképzelhető, hogy esetleg a befelé indulókra teljesül a sejtés. Hasonló állítások a félkörív esetén is megfogalmazhatók az arról induló geodetikusra, ott azonban olyan példát is találtunk, hogy egy geodetikus egymás után 3-szor metszi a görbét, de közben önmagát egyszer sem. Ez az eredmény azért sajnálatos, mert a $\gamma_{\mathbb{T}}$ görbére ezek az állítások várhatóan lényegesen nehezebben igazolhatók mint a félkörívre lettek volna, hiszen a tórusz-görbe képlete nem ismert.

Ezeken felül azt is megfigyeltük, hogy a tórusz görbe minden pontjából lehet egy olyan geodetikust indítani, amelyik nem fogja még egyszer metszeni $\gamma_{\mathbb{T}}$ -t, ugyanis vagy kimegy a végtelenbe, vagy pedig merőlegesen nekiütközik az x -tengelynek.

Mivel ezek a sejtések arról szólnak, hogy azonos pontból különböző szögekkel indított geodetikusként hogyan viselkednek, így ezek vizsgálatának nagyon fontos eszközei az egymáshoz infinitézimálisan közeli geodetikusként leíró *Jacobi-mezők*: Ha

$$\Gamma: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M$$

a γ geodetikus egy geodetikuskon keresztül történő variációja (azaz $\Gamma(\cdot, 0) = \gamma(\cdot)$ és minden $s \in [0, 1]$ -re $\Gamma(\cdot, s)$ egy geodetikus), akkor $\partial_s \Gamma(t, 0)$ egy γ menti Jacobi-mező és minden Jacobi-mezőhöz megadható olyan geodetikus variáció amiből ilyen módon megkapható. Ha γ egy ívhossz paraméterezett geodetikus és létezik olyan J Jacobi-mező γ mentén mely a $t_0 \in [a, b]$ pontban eltűnik, akkor azt mondjuk hogy a $\gamma(t_0)$ a $\gamma(a)$ -hoz *konjugált pont*. Ismert továbbá, hogy minden Jacobi-mező felbontható egy γ -val párhuzamos és egy rá merőleges vektormező összegére, ahol a párhuzamos rész sehol sem tűnik el, így a konjugált pontok vizsgálatakor elegendő a normális Jacobi-mezőket és ezek eltűnését vizsgálni. A normális Jacobi-mezők egyenlete a síkon lényegesen leegyszerűsödik ha a γ érintővektor-mezejét minden pontban kiegészítjük egy ortonormált bázissá (mely folytonosan függ a ponttól) és ebben írjuk fel a mezőt. A normalitás miatt elég minden t paraméterre a $\dot{\gamma}(t)$ -re merőleges bázisvektorbeli együtthatóját megadni a mezőnek. Ha ezt $f(t)$ -vel jelöljük, akkor f -re a következő másodrendű lineáris differenciálegyenletet kapjuk:

$$f''(t) + K(\gamma(t))f(t) = 0,$$

ahol K a Gauss-görbület. Mivel minket most olyan variációk érdekelnek, ahol a kezdőpont fixen marad, ezért olyan f megoldásokat keresünk melyek a kezdőpontban eltűnnek. Emellett világos, hogy $f'(a) = 1$ is feltehető. Ezek a kezdeti feltételek egy rögzített geodetikus és kezdőpont esetén egyértelműen meghatározzák a megfelelő Jacobi-mezőt.

A problémánkhöz visszatérve belátható, hogy ha veszünk egy $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ geodetikust ami a rögzített $p \in \gamma_{\mathbb{T}}$ pontról indul a tórusz-görbe belseje felé annak p -beli érintővektorával $0 < \alpha < \pi$ szöget bezáró kezdeti sebességgel, akkor a γ és a tórusz-görbe második metszéspontja az α szögtől folytonosan függ. Továbbá ha γ mentén az első konjugált pont a metszéspont után van, akkor a Jacobi-egyenlet kezdeti feltételektől való folytonos függése miatt van olyan $\delta > 0$, hogy a $0 < \theta < \pi$ szöggel indított geodetikuskon az első konjugált pont szintén $\gamma_{\mathbb{T}}$ -n kívülre esik, ha $|\theta - \alpha| < \delta$. Ekkor az is teljesül, hogy ezen geodetikusként a megfelelő f függvények előjele állandó, ami geometriailag azt jelenti, hogy nagyobb szöggel induló geodetikus ezen előjeltől függően korábban, vagy később fogja metszeni $\gamma_{\mathbb{T}}$ -t. A sejtett monotonitás ezért teljesülne, ha be tudnánk látni hogy nincs olyan a tórusz-görbe által határolt területen belülré eső geodetikus szakasz, melyen van konjugált pont.

Ezt a sejtést azonban nehéznek bizonyult igazolni, ugyanis egyrészt sem a $\gamma_{\mathbb{T}}$, sem pedig egy erről induló általános geodetikus egyenlete nem ismert, ennek hiányában pedig a Gauss-görbület görbék menti értékeit is csak becsülni lehetne. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek gyökeinek vizsgálatához jól ismert eredmény a Sturm–Picone összehasonlítási tétel. Ez utóbbit szeretttük volna alkalmazni a fenti problémára, a már tárgyalt nehézségek miatt azonban akadályokba ütköztünk. A tétel alapján ha

$$\begin{aligned} f_1''(t) + q_1(t)f_1(t) &= 0, \\ f_2''(t) + q_2(t)f_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

minden $t \in (a, b)$ -re és $q_1 \leq q_2$, akkor f_2 -nek f_1 bármely két gyöke közé esik nullhelye. Ezt olyan szereposztásban lehetne alkalmazni, hogy f_1 egy befele induló γ geodetikus menti, f_2 pedig a $\gamma_{\mathbb{T}}$ mint ugyanazon pontból induló görbe menti Jacobi-mezőt leíró függvény, valamint q_i a megfelelő görbe menti Gauss-görbület. Ahhoz, hogy ezt alkalmazni tudjuk egyrészt pontonként felül kéne tudnunk becsülni az egyik geodetikus menti Gauss-görbületet a másik mentivel, továbbá figyelembe kell venni azt is, hogy a görbék $\gamma_{\mathbb{T}}$ belsejébe eső részei nem feltétlenül ugyanolyan hosszúak. A pontonkénti becslés azonban sajnos általában nem feltétlenül teljesül, ugyanis van olyan pont $\gamma_{\mathbb{T}}$ -n, hogy itt a K negatív gradiense a görbe belseje felé mutat.

Jelenleg itt tartunk ennek a vizsgálatában, úgy tűnik hogy a monotonitással kapcsolatos sejtés igaz, azonban ennek igazolására még csak ötleteink vannak.

A sokaság teljessé tétele

A (\mathbb{H}, g_{Ang}) Riemann-sokaság nem teljes, de mint metrikus tér teljessé tehető. Ha tekintjük az $(x, 0)$ ponton átmenő függőleges, illetve a $(0, r)$ ponton átmenő vízszintes egyeneseket, akkor ezek g_{Ang} szerinti hossza tart 0-hoz ha $|x| \rightarrow +\infty$ valamint ha $r \rightarrow +\infty$ vagy $r \rightarrow 0$. Ennek segítségével belátható, hogy ha két (\mathbb{H}, g_{Ang}) -beli Cauchy-sorozat minden kompakt halmazt elhagy, akkor azok összefűzése is Cauchy. Így pedig a teljessé tétel során csak egy pontot kell hozzávennünk a sokasághoz és így topológiailag egy S^2 gömbfelületet kapunk, mely már teljes. A Riemann-metrika ugyan várhatóan nem fog kiterjedni a hozzávett pontra, de ismert eredmény, hogy egy kompakt metrikus tér bármely két pontja között egyértelműen létezik összekötő minimális hosszúságú görbe. A sokaság azon pontjai között melyek között a metrika teljességének hiánya miatt nincsen minimális összekötő geodetikus a teljessé tétel után olyan görbét tudunk majd húzni, mely átmegy ezen a végtelen távoli ponton. Ezen görbék sokaságba eső részei geodetikusok, melyek \mathbb{H} minden kompakt részhalmazát elhagyják. Ez többféleképpen történhet, az egyik lehetséges viselkedés hogy a görbe egyre inkább megközelíti az x -tengelyt. A Liouville-formula segítségével a geodetikus differenciálegyenlet rendszer átírható a következő alakba [1]:

$$\begin{cases} x' = \cos(\theta), \\ r' = \sin(\theta), \\ \theta' = \frac{x}{2} \sin(\theta) + \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{2}\right) \cos(\theta), \end{cases}$$

ahol θ a geodetikus érintővektorának x -tengellyel bezárt szöge. Ezen alakból következik, hogy ha egy geodetikus közelít az x -tengelyhez, akkor egy idő után vagy visszafordul és elkezd felfele haladni (ezt követően persze visszatérhet még a tengelyhez, de ismert [5], hogy ezt csak azt követően teheti meg, hogy metszette az $r = \sqrt{2}$ egyenest), vagy pedig

nekiütközik az x -tengelynek $\pi/2$ szöggel (az ilyen geodetikusok egyébként az immertált S^2 megoldások vizsgálatánál is fontos szerepet kapnak).

Ha sikerülne megérteni, hogy melyek azok a pontok amik között nincs minimalizáló geodetikus, valamint hogy a minimalizáló görbék sokaságba eső részeinek még milyen tulajdonságai vannak, akkor ennek segítségével talán igazolható lenne, hogy mégis teljesül a sejtésünk, miszerint a sokaság zárt geodetikusai metszik egymást.

Egyéb felmerült kérdések

Az Angenent-tórusz egyértelműsége mellett felmerült forgásfelületekkel kapcsolatban vizsgálható kérdésként többek között az is, hogy hogyan viselkedik a középgörbületi folyam hatására egy *standard tórusz*, azaz egy olyan forgásfelület melynek meridiángörbéje egy kör. Itt várható viselkedés volt az, hogy ha rögzítjük a megforgatott kör átmérőjét, akkor ha ez közel van a forgástengelyhez, akkor az ahhoz legközelebbi pontban fog megjelenni egy szingularitás, ha pedig messze, akkor a tórusz egy körívre fog rázsugorodni. Ezt a kérdést azonban a [8] cikk megválaszolja, mely szerint tényleg ez a viselkedés tapasztalható. Az azonban, hogy mi az a kezdeti távolság ahol a két viselkedés különvállik nem ismert pontosan, csak numerikus közelítéseket találtunk [9].

További munka

A fenti sejtéseket, ötleteket kidolgozni.

Felmerült ötletként, hogy ha találunk a felső félsíkon egy g_{Ang} -tól különböző olyan metrikát, melynek pre-geodetikus görbéi megegyeznek a (\mathbb{H}, g_{Ang}) sokaságéival (vagyis a két metrika *projektíven ekvivalens*), akkor esetleg egyszerűbb alakot kaphatunk a geodetikusok egyenletére, melyből könnyebben vonhatunk le következtetéseket.

Vizsgálható továbbá, hogy mennyiben alkalmazható a *Kolmogorov–Arnold–Moser elmélet*, mely azt vizsgálja hogy egy integrálható rendszerben meglévő invariáns-tóruszok hogyan deformálódnak a rendszer valamely kis perturbációja során. Elképzelhető, hogy bizonyos tóruszok eltűnnek, míg mások megmaradnak. Esetünkben a geodetikus differenciálegyenlet rendszer valószínűleg nem integrálható, de ezen elmélet segítségével esetleg mégis található egy invariáns tórusz, mely segítségével jobban megérthető lenne a geodetikusok viselkedése.

Irodalomjegyzék

- [1] Sigurd B. Angenent (1992), *Shrinking Doughnuts*, Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States, 3. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol 7. Birkhäuser, Boston, MA.
- [2] Carlo Mantegazza (2011), *Lecture Notes on Mean Curvature Flow*, Progress in Mathematics, vol. 290, Basel: Birkhäuser/Springer Basel AG.
- [3] Gerhard Huisken (1990), *Asymptotic Behavior for Singularities of the Mean Curvature Flow*, Journal of Differential Geometry 31, no. 1, 285–299.
- [4] Gregory Drugan (2015), *An Immersed S^2 Self-shrinkers*, Trans. Amer. Math. Soc. 367, no. 5, 3139-3159.
- [5] Gregory Drugan, Stephen J. Kleene (2017), *Immersed Self-shrinkers*, Trans. Amer. Math. Soc. 369, no. 10, 7213-7250.
- [6] Gregory Drugan, Hojoo Lee, Xuan Hien Nguyen (2018), *A Survey of Closed Self-Shrinkers with Symmetry*, Results Math 73, 32.
- [7] Gregory Drugan, Xuan Hien Nguyen (2018), *Shrinking Doughnuts via Variational Methods*, Journal of Geometric Analysis 28, 3725–3746.
- [8] H. M. Sonner, P. E. Souganidis (1993), *Singularities and Uniqueness of Cylindrically Symmetric Surfaces Moving by Mean Curvature*, Comm. Partial Differential Equations, 18, 859–894.
- [9] John W. Barrett, Klaus Deckelnick, Robert Nürnberg (2019), *A Finite Element Error Analysis for Axisymmetric Mean Curvature Flow*.