A középgörbületi folyam a síkon és a térben

Hallgató: Németh Álmos
Témavezető: Csikós Balázs

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2020 december

Bevezetés

Definíció

Egy $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ immertált kezdeti felülethez tartozó középgörbületi folyam a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = \boldsymbol{H}(p,t), \\ \varphi_0 = \varphi \end{cases}$$

differenciálegyenlet $\{\varphi_t\}_{t\in[0,T)}$ megoldása, ahol $\boldsymbol{H}(p,t)$ a $\varphi_t(M)$ felület $\varphi_t(p)$-beli középgörbületi vektora.

Definíció

Egy $\varphi\colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ immertált kezdeti felülethez tartozó középgörbületi folyam a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = \boldsymbol{H}(p,t), \\ \varphi_0 = \varphi \end{cases}$$

differenciálegyenlet $\{\varphi_t\}_{t\in[0,T)}$ megoldása, ahol $\boldsymbol{H}(p,t)$ a $\varphi_t(M)$ felület $\varphi_t(p)$-beli középgörbületi vektora.

Önhasonló megoldás

A folyam egy megoldását *önhasonlónak* nevezzük, ha

$$\varphi_t(M) = f(t)\varphi(M).$$

Szingularitások

Általában $T < \infty$, mely esetben a folyamnak *szingularitása* van. Bizonyos feltételek mellett a szingularitásokra ránagyítva aszimptotikusan egy önhasonló megoldást kapunk.

Szingularitások

Általában $T < \infty$, mely esetben a folyamnak *szingularitása* van. Bizonyos feltételek mellett a szingularitásokra ránagyítva aszimptotikusan egy önhasonló megoldást kapunk.

Triviális példák önhasonló forgásfelületekre

- gömb
- henger
- sík

Szingularitások

Általában $T < \infty$, mely esetben a folyamnak *szingularitása* van. Bizonyos feltételek mellett a szingularitásokra ránagyítva aszimptotikusan egy önhasonló megoldást kapunk.

Triviális példák önhasonló forgásfelületekre

- gömb
- henger
- sík

Angenent tórusz

1992-ben Sigurd B. Angenent igazolta egy önhasonló, tórusszal homeomorf *beágyazott* forgásfelület létezését, ennek unicitása azonban még nyitott kérdés. A félév során ezzel foglalkoztunk.

A vizsgált probléma

Tétel [Angenent]

Egy $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{H}$ meridiángörbéjű forgásfelület pontosan akkor lesz önhasonló megoldás, ha a görbe a $(\mathbb{H}, g)$ Riemann-sokaság egy *geodetikusa*, ahol $\mathbb{H}$ a felső félsík és

$$g(x, r) = r^2 e^{-\frac{x^2+r^2}{2}}(dx^2 + dr^2) \qquad ((x, r) \in \mathbb{H}).$$

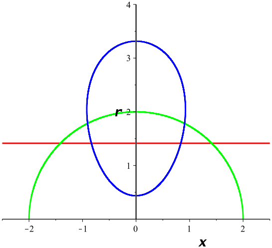
A vizsgált probléma

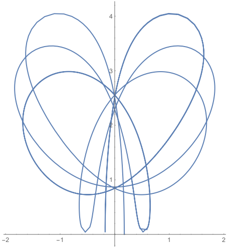
A $(\mathbb{H}, g)$ Riemann-sokaság

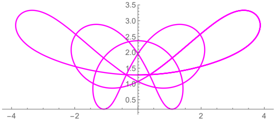
Tétel [Angenent]

Egy $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{H}$ meridiángörbéjű forgásfelület pontosan akkor lesz önhasonló megoldás, ha a görbe a $(\mathbb{H}, g)$ Riemann-sokaság egy *geodetikusa*, ahol $\mathbb{H}$ a felső félsík és

$$g(x, r) = r^2 e^{-\frac{x^2+r^2}{2}} (dx^2 + dr^2) \qquad ((x, r) \in \mathbb{H}).$$







A vizsgált probléma

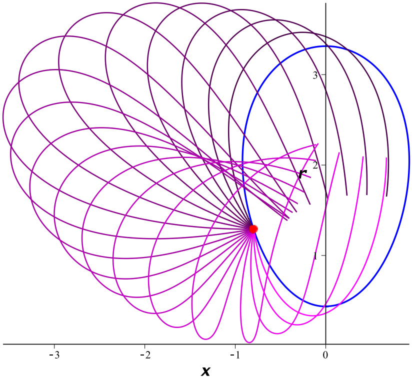
Az egyszerű zárt geodetikus unicitásának bizonyítására egy lehetséges terv

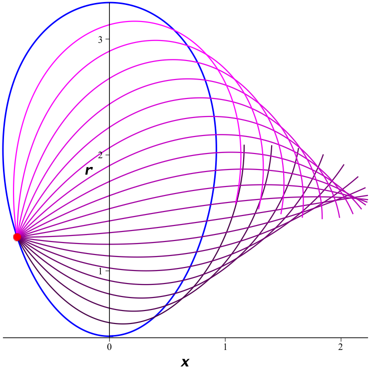
1. lépés

Minden zárt geodetikus metszi az önhasonló tórusznak megfelelő görbét $\Rightarrow$ elég csak az erről induló geodetikusokat vizsgálni.

1. lépés

Minden zárt geodetikus metszi az önhasonló tórusznak megfelelő görbét
$\Rightarrow$ elég csak az erről induló geodetikusokat vizsgálni.



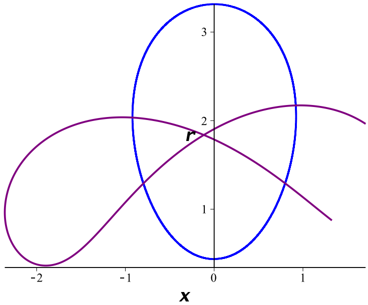


A vizsgált probléma

Az egyszerű zárt geodetikus unicitásának bizonyítására egy lehetséges terv

2. lépés

A tórusz-görbét metsző minden zárt geodetikus legalább kétszer lép be annak belsejébe és az oda eső ívei közül bármely két egymást követő metszi egymást.



Köszönöm a figyelmet!