Eötvös Loránd
Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Matematikai
Intézet

Kubasch Alexander

Kompakt komplex sokaságok endomorfizmusai

Egyéni kutatómunka 2. Témavezető: Szőke Róbert

Eredetileg Szőke Róbert 2020 tavaszán tartott Komplex sokaságok c. kurzusán merült fel a kérdés, hogy az X és Y kompakt komplex sokaságok esetén vajon véges dimenziós-e valamilyen értelemben az $X \to Y$ holomorf leképezések halmaza. Ismert, hogy egy kompakt komplex sokaság biholomorfizmusai egy (véges dimenziós) komplex Lie-csoportot alkotnak. Szőke Róbert tanácsára végül ezért szorítkoztam az $X = Y$ speciális estre.

Kutatómunkám témája tehát a következő: *Egy X kompakt komplex sokaság esetén mit mondhatunk az $X \to X$ holomorf leképezések* $\mathrm{End}(X)$ *monoidjáról?* Ez a kérdés végül az alábbi három valamivel konkrétabb problémában öltött testet:

1. Létezik-e valamilyen komplex analítikus struktúra az $\mathrm{End}(X)$ monoidon?

2. Miféle invariánsa $\mathrm{End}(X)$ az X sokaságnak? (Meghatározza-e azt például?)

3. "Mennyivel" nagyobb $\mathrm{End}(X)$, mint $\mathrm{Aut}(X) \subset \mathrm{End}(X)$?

Az első kérdésre pozitív választ találtam az irodalomban, a másodikat pedig sikerült megválaszolnom: $\mathrm{End}(X)$ biholomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározza az X sokaságot. A harmadik kérdésre a válasz "attól függ": $\mathrm{End}(\mathbb{P}^n)$ például egy végtelen sok komponensből álló, nem korlátos dimenziójú szörnyeteg, míg létezik olyan X Riemann-felület, melyre $\dim(\mathrm{End}(X)) = 1$.

1. Komplex struktúra az endomorfizmusok monoidján

Adrien Douady 1966-os cikkének következményeképpen az endomorfizmusok monoidja természetes módon felruházható egy úgynevezett komplex tér struktúrájával. Előbb ennek a fogalomnak a vázlatos bevezetése következik, majd Douady számunkra releváns eredményei a mi speciális esetünkre alkalmazva.

1.1. Definíció. Az $(X, \mathcal{A}_X)$ párt gyűrűzött térnek nevezzük, ha X topologikus tér, $\mathcal{A}_X$ pedig gyűrűk egy kévéje X felett. Az $\mathcal{A}_X$ kévét ekkor az X struktúrakévéjének mondjuk.

Egy morfizmus az $(X, \mathcal{A}_X)$ és $(Y, \mathcal{A}_Y)$ gyűrűzött terek között egy olyan $(f, \tilde{f})$ pár, ahol $f : X \to Y$ folytonos leképezés és $\tilde{f} : \mathcal{A}_Y \to f_*(\mathcal{A}_X)$ egy kéve-morfizmus.

A továbbiakban $\mathcal{A}_X$ általában részkévéje lesz a komplex-értékű folytonos függvények kévéjének. Ekkor az $\tilde{f}$ kéve-morfizmus definíciója tipikusan a következő: ha $U \subset Y$ nyílt és $h \in \mathcal{A}_Y(U)$ egy függvény, $\tilde{f}(U)(h) := h \circ f \in \mathcal{A}_X(f^{-1}(U))$.

1.2. Példa. Ha $\mathcal{C}^\infty_M$ a sima függvények kévéje az M sokaságon, $(M, \mathcal{C}^\infty_M)$ gyűrűzött tér és egy $f : M \to N$ leképezés pontosan akkor sima, ha $f : (M, \mathcal{C}^\infty_M) \to (N, \mathcal{C}^\infty_N)$ egy gyűrűzött terek közti morfizmus.

1.3. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{C}^n$ tartomány, $f_1, \dots, f_k : D \to \mathbb{C}$ holomorfak és $X = \{z \in D \mid f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0\}$. Jelölje $\mathcal{O}_D$ a holomorf függvények kévéjét a D tartományon és $\mathcal{I} = \sum_j f_j \mathcal{O}_D$ az X úgynevezett ideálkévéjét.

Ekkor $\mathcal{O}_X = (\mathcal{O}_D / \mathcal{I})\big|_X$ egy kéve X felett és az így kapott $(X, \mathcal{O}_X)$ gyűrűzött teret lokális modellnek nevezzük, az $\mathcal{O}_X$ kévét pedig az X-en értelmezett holomorf függvények kévéjének.

1.4. Definíció. Komplex térnek nevezünk egy $(X, \mathcal{O}_X)$ gyűrűzött teret, ha X Hausdorff és minden pontjának létezik egy nyílt környezete, amely (mint gyűrűzött tér) izomorf egy lokális modellel. A komplex terek közti morfizmusokat holomorf leképezéseknek nevezzük.

1.5. Példa. Ha $\mathcal{O}_X$ a holomorf függvények kévéje az X komplex sokaságon, $(X, \mathcal{O}_X)$ komplex tér és egy $f : X \to Y$ leképezés pontosan akkor holomorf, ha $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ holomorf az 1.4 definíció értelmében.

Komplex tér tehát minden komplex sokaság és lokális modell, továbbá egy komplex tér minden nyílt részhalmaza, vagy megfelelő csoporthatással vett faktora, illetve két komplex tér diszjunkt uniója, szorzata, stb. Még egy fontos példa az úgynevezett analítikus altér fogalma:

1.6. Definíció. Tegyük fel, hogy $(X, \mathcal{O}_X)$ komplex tér és $Y \subset X$ olyan részhalmaz, hogy minden pontjának létezik egy $U \subset X$ nyílt környezete és $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_X(U)$ holomorf függvények, hogy $Y \cap U = \{f_1 = \cdots = f_k = 0\}$.

Legyen $\mathcal{I}\big|_U = \sum_j f_j \mathcal{O}_X\big|_U$ az Y ideálkévéje és $\mathcal{O}_Y = (\mathcal{O}_X / \mathcal{I})\big|_Y$. Ekkor $(Y, \mathcal{O}_Y)$ is komplex tér és X analítikus alterének nevezzük.

1.7. Definíció. Az $(X, \mathcal{O}_X)$ tér dimenziója az $x \in X$ pontban $\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$, a struktúrakéve x-beli rostjának Krull-dimenziója.

1.8. Megjegyzés. Az irodalomban Krull-dimenzió helyett általában Chevalley-dimenzót használnak, de [6] 8.2. alfejezete szerint egy lokális Noether-gyűrű Krull-dimenziója egybeesik a Chevalley-dimenziójával, $\mathcal{O}_{X,x}$ pedig lokális és Noether. Lásd: [5], Chapter 2.

1.9. Definíció. Az $(X, \mathcal{O}_X)$ tér beágyazási dimenziója az $x \in X$ pontban a legkisebb olyan $d \in \mathbb{N}$ szám, amelyhez létezik egy $U \hookrightarrow \mathbb{C}^d$ holomorf beágyazása az x egy U nyílt környezetének. Jelölés: $\mathrm{emb}_x X$

$\mathrm{emb}_x X$ nem más mint a $T_x X = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ Zariski-érintőtér dimenziója, ahol $\mathfrak{m}_x$ az $\mathcal{O}_{X,x}$ lokális gyűrű maximális ideálja. Lásd: [5], Chapter 6.

1.10. Állítás. *Tetszőleges $x \in X$ pont esetén* $\dim_x X \leq \mathrm{emb}_x X$.

Bizonyítás. Lásd: [5], Chapter 6. □

1.11. Definíció. Az $(X, \mathcal{O}_X)$ tér $x \in X$ pontját simának, vagy regulárisnak nevezzük, ha létezik egy U nyílt környezete, amely biholomorf $\mathbb{C}^n$ egy nyílt részhalmazával.

1.12. Állítás. *Az $(X, \mathcal{O}_X)$ tér $x \in X$ pontja akkor és csak akkor reguláris, ha* $\dim_x X = \mathrm{emb}_x X$.

Bizonyítás. Lásd: [5], Chapter 6. □

1.13. Következmény. *Egy komplex tér pontosan akkor komplex sokaság, ha minden pontja reguláris.* □

1.14. Tétel. *Ha $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ egy "rendes" (kompakt halmaz őse kompakt) holomorf leképezés, akkor $f(X) \subset Y$ egy analitíkus altér és* $\dim_{f(x)} f(X) \leq \dim_x X$.

Bizonyítás. Lásd: [5], Chapter 10. □

Douady cikkének számunkra releváns következményeit az 1.15 tételben foglalom össze. Az eredeti cikk sokkal többet bizonyít, mint ami az 1.15 tétel kimondásában szerepel, lásd: [1]. Douady eredményei angol nyelven megtalálhatók a [3] jegyzetben, vagy a [4] könyv VIII. fejezetében.

1.15. Tétel. *Legyen X kompakt komplex sokaság és jelölje* $\mathrm{End}(X)$ *az $X \to X$ holomorf leképezések monoidját. Ekkor*

1. $\mathrm{End}(X)$ *természetes módon felruházható egy komplex tér struktúrájával, melyen a topológia az egyenletes konvergencia topológiája.*

2. *A* $\kappa : \mathrm{End}(X) \times X \to X;\ (f, x) \mapsto f(x)$ *kiértékelő leképezés holomorf.*

3. *A függvénykompozíció egy* $\mathrm{End}(X) \times \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(X)$ *holomorf leképezés.*

4. $f \in \mathrm{End}(X)$ *Zariski-érintőtere* $T_f\mathrm{End}(X) \cong H^0(\Gamma_f; \mathcal{N}_{\Gamma_f})$, *ahol $\Gamma_f \subset X \times X$ az f leképezés grafikonja, $\mathcal{N}_{\Gamma_f}$ pedig a grafikon normálnyalábja.* □

2. Mit mond egy sokaságról az endomorfizmus-monoidja?

Legyen X kompakt komplex sokaság. Azt szeretném bebizonyítani, hogy X endomorfizmusainak a monoidja – felruházva az 1.15 tételben definiált komplex struktúrával – biholomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározza az X komplex sokaságot. Pontosabban:

2.1. Tétel. *Ha X és Y kompakt komplex sokaságok és $\Phi : \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(Y)$ egy biholomorf monoid-izomorfizmus, akkor Φ indukál egy $\varphi : X \to Y$ biholomorfizmust.*

Bizonyítás. Jelölje $C_X \subset \mathrm{End}(X)$ a konstans $X \to X$ leképezések halmazát és $\alpha : C_X \to X$ a természetes bijekciót. A cél azt belátni, hogy α egy biholomorfizmus, ehhez azonban előbb meg kell mutatni, hogy C_X természetes módon örököl egy komplex struktúrát az $\mathrm{End}(X)$ tértől.

Ebből már következik a tétel állítása: tegyük fel, hogy $\Phi : \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(Y)$ egy biholomorf monoid-izomorfizmus. Nem nehéz meggondolni, hogy

$$C_X = \{f \in \mathrm{End}(X) \mid \forall g \in \mathrm{End}(X) : f \circ g = f\},$$

tehát C_X kizárólag a monoid-struktúrától függ. Következésképpen, mivel Φ egy monoid-izomorfizmus, $\Phi(C_X) = C_Y$ és mivel Φ egy biholomorfizmus, a

$$\varphi : X \xrightarrow{\cong} C_X \xrightarrow{\Phi|_{C_X}} C_Y \xrightarrow{\cong} Y$$

leképezés is az. Most megmutatjuk, hogy α valóban biholomorfizmus.

Első lépés: komplex struktúra a C_X halmazon. Ahhoz, hogy C_X örököljön egy komplex struktúrát, elég megmutatni, hogy $C_X \subset \mathrm{End}(X)$ nyílt. (Valójában összefüggőségi komponensek uniója.) Az 1.15 tétel első pontja szerint $\mathrm{End}(X)$ topológiája az egyenletes konvergencia topológiája.

Megmutatjuk, hogy C_X nyílt: tegyük fel indirekt, hogy az f_n függvénysorozat csupa nem konstans leképezésből áll, de mégis az $f(x) \equiv c \in X$ konstans függvényhez konvergál egyenletesen. A $c \in X$ pontnak létezik egy U nyílt környezete, amely biholomorf egy $\mathbb{C}^n$-beli nyílt halmazzal. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik egy $x_n \in X$ pont, melyre $f_n(x_n) \notin U$, hiszen különben $f_n : X \to U \subset \mathbb{C}^n$ konstans leképezés lenne X kompaktsága miatt. Ugyanezen okból tehetjük fel, hogy $x_n \to x$ konvergens sorozat, de ekkor $f_n(x_n) \to f(x) = c$. Ez az $X \setminus U$ halmaz zártsága miatt azt jelentené, hogy $c \in X \setminus U$, ami ellentmondás, hiszen U a c egy nyílt környezete.

Második lépés: $\alpha : C_X \to X$ biholomorfizmus. Legyen $x_0 \in X$ tetszőleges. Ekkor $C_X \cong C_X \times \{x_0\} \subset \mathrm{End}(X) \times X$ és az α bijekció nem más mint a

$$C_X \cong C_X \times \{x_0\} \hookrightarrow \mathrm{End}(X) \times X \xrightarrow{\kappa} X$$

(holomorf) leképezés, ahol κ az 1.15 tétel második pontjának kiértékelő-leképezése. Egy holomorf bijekció két azonos-dimenziós komplex sokaság között automatikusan biholomorfizmus, lásd pl. [2] első fejezetét. Elég tehát belátnunk, hogy C_X egy n-dimenziós komplex sokaság. Ehhez legyen $f \in C_X$ az azonosan $c \in X$ leképezés. Ekkor 1.15 negyedik pontja (és X kompaktsága) következtében

$$T_f C_X \cong H^0(\Gamma_f, \mathcal{N}_{\Gamma_f}) \cong H^0(X \times \{c\}, X \times T_c X) \cong H^0(X, \mathbb{C}^n) \cong \mathbb{C}^n.$$

Másrészt 1.14, illetve 1.10 szerint

$$n = \dim(T_f C_X) \geq \dim_f C_X \geq \dim_{\alpha(f)} \alpha(C_X) = \dim_c X = n,$$

tehát 1.13 alapján C_X egy n-dimenziós komplex sokaság. Ezzel beláttuk, hogy az $\mathrm{End}(X)$ monoid biholomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározza az X kompakt komplex sokaságot. □

2.2. Megjegyzés. Természetes kérdés, hogy a 2.1 tétel igaz marad-e komplex sokaságok helyett kompakt komplex terek esetén is.

A fenti bizonyítás minimális módosításokkal általánosítható normális terek esetére. (Egy komplex teret normálisnak nevezünk, ha a struktúrakévéjének minden rostja normális lokális gyűrű. Ennek egy ekvivalens átfogalmazása, hogy a tér szinguláris pontjainak kodimenziója legalább 2 és minden a szinguláris pontok komplementerén értelmezett holomorf függvény holomorfan kiterjed az egész térre.)

Ha az X tér szingularitásai normálisnál bonyolultabbak, a 2.1 tétel bizonyítása nem működik: Némethi András ellenpéldája egy olyan X komplex tér, amely nem biholomorf a konstans endomorfizmusainak C_X halmazával. (C_X ehelyett X normalizáltjával biholomorf.)

3. Példák

3.1. Példa. Jelölje $\mathbb{P}^n$ az n-dimenziós komplex projektív teret. Ekkor

$$\mathrm{End}(\mathbb{P}^n) = \coprod_{d=0}^{\infty} \mathrm{End}_d(\mathbb{P}^n),$$

mint komplex tér, ahol $\mathrm{End}_d(\mathbb{P}^n)$ egy $\big((n+1)\binom{n+d}{d} - 1\big)$-dimenziós komplex sokaság és $\mathrm{End}_0(\mathbb{P}^n) = \mathbb{P}^n$.

Bizonyítás. Folklór, hogy minden $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ holomorf leképezés $[f_0(z), \ldots, f_n(z)]$ alakú, ahol az f_j függvények azonos fokú homogén polinomok.

Jelölje $\mathrm{End}_d(\mathbb{P}^n)$ a projektív tér olyan endomorfizmusait, amelyeknek minden koordinátája d-edfokú polinom és $H(n+1,d)$ az olyan $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ polinomiális leképezések vektorterét, melyeknek minden koordinátafüggvénye homogén d-edfokú. Minden $f \in H(n+1,d)$ leképezés, amelyre fenn áll, hogy $f^{-1}(0) = 0$, reprezentál egy elemet az $\mathrm{End}_d(\mathbb{P}^n)$ halmazban. Az f és g leképezések pontosan akkor reprezentálják ugyanazt az elemet, ha minden j indexre $\frac{f_j}{g_j} : \mathbb{P}^n \to \mathbb{C}^*$ ugyanaz a (holomorf és ezért konstans) leképezés. Ekkor tehát létezik egy $c \in \mathbb{C}^*$ konstans, amelyre $f = c \cdot g$.

Következésképpen, az $f^{-1}(0) = 0$ feltétel nyíltsága miatt, $\mathrm{End}_d(\mathbb{P}^n)$ egy nyílt részhalmaza a $\mathbb{P}\big(H(n+1,d)\big) \cong \mathbb{P}^{(n+1)\binom{n+d}{d}-1}$ komplex projektív térnek. Speciálisan, ha $d = 0$, az $f^{-1}(0) = 0$ feltétel semmitmondó és $\mathrm{End}_0(\mathbb{P}^n) = \mathbb{P}^n$. □

3.2. Példa. Legyen $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ egy kompakt komplex tórusz. Ekkor

$$\mathrm{End}(X) = \coprod_{d=0}^{\infty} X_d,$$

mint komplex tér, ahol $X_d = X$ minden d esetén.

Bizonyítás. Nem nehéz megmutatni, hogy X minden endomorfizmusa egy olyan $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ "komplex-affin" transzformációból származtatható, amely a Γ rácsot egy $u + \Gamma$ eltoltjába képezi, ahol $u \in \mathbb{C}^n$.

Minden ilyen leképezés egyértelműen felírható egy a Γ rácsot önmagába képző komplex-lineáris transzformáció és egy eltolás kompozíciójaként. A $z \mapsto z + u$ és $z \mapsto z + v$ eltolások pontosan akkor adják ugyanazt az endomorfizmusát X-nek, ha $u - v \in \Gamma$, tehát az eltolások halmaza bijekcióban áll X-szel.

Legyen $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ olyan komplex-lineáris transzformáció, amelyre $A\Gamma \subset \Gamma$. Válasszuk $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ (valós) bázisának Γ egy generátorrendszerét. Ekkor az $A\Gamma \subset \Gamma$ feltétel azzal ekvivalens, hogy ebben a bázisban az A mátrixa egész-együtthatós. Az $A\Gamma \subset \Gamma$ egyenletnek eleget tevő A komplex-lineáris transzformációk tehát egy diszkrét teret alkotnak, amelyről az egész számmal való nyújtások mutatják, hogy megszámlálhatóan végtelen számosságú.

Mindent összevetve tehát $\mathrm{End}(X)$ biholomorf X és egy (megszámlálhatóan végtelen) diszkrét tér szorzatával. □

3.3. Példa. Legyen X egy $(g > 1)$-génuszú Riemann felület. Ekkor

$$\mathrm{End}(X) = X \sqcup \{\text{véges sok pont}\},$$

mint komplex tér. (A $g = 0, 1$ esetek a 3.1 és 3.2 példák speciális esetei.)

Bizonyítás. Michele de Franchis 1913-as cikke szerint, amennyiben X és Y kompakt Riemann-felületek és $g(Y) > 1$, a nem-konstans holomorf $X \to Y$ leképezések halmaza véges. Lásd: [7]. $\square$

4. Fennmaradó kérdések

A kompakt komplex sokaságok endomorfizmus-monoidjaival való ismerkedésem során több olyan kérdés is felmerült, amivel a jövőben még szívesen foglalkoznék:

- A 3.1, 3.2 és 3.3 példákat alapul véve természetes sejtésnek tűnik, hogy egy X kompakt komplex sokaság $\mathrm{End}(X)$ endomorfizmus-monoidja mindig sima. Erre utal az a tény is, hogy egy olyan G komplex tér, amely el van látva egy a szokásos csoport-axiómákat teljesítő $G \times G \to G$ holomorf művelettel, automatikusan sima. Lásd a [3] jegyzet 7.2. alfejezetét.
- Mi mondható az $Y \subset X$ részsokaság és a $\mathrm{Hol}(X, Y) \subset \mathrm{End}(X)$ részhalmaz kapcsolatáról? Analitikus altér-e $\mathrm{Hol}(X, Y) \subset \mathrm{End}(X)$?
- Michel Brion projektív varietások endomorfizmusairól szóló [8] cikkének mely állításai általánosíthatók a kompakt komplex sokaságok esetére?
- Legyen $\sim$ valami érdekes ekvivalencia-reláció az endomorfizmus-monoidon. (Például $f \sim g$, pontosan akkor, ha $f^* = g^* : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$, vagy, ha f és g homotópok, stb.) Mi mondható az $\mathrm{End}(X)/\sim$ objektumról?

5. Hivatkozások

[1] Adrien Douady. *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné.* Annales de l'Institut Fourier, Volume 16 (1966) no. 1, p. 1-95

[2] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry. An Introduction.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[3] Jón Ingólfur Magnússon. *Lectures on Cycle Spaces.* `https://www.ruhr-uni-bochum.de/imperia/md/content/mathematik/lehrstuhl-ii/cyclespace.pdf`

[4] Hans Grauert, Thomas Peternell, Reinhold Remmert (editors) *Several Complex Variables VII. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol* 74. Springer, Berlin, Heidelberg, 1994.

[5] Hans Grauert, Reinhold Remmert. *Coherent Analytic Sheaves.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.

[6] N. S. Gopalakrishnan. *Commutatuve Algebra.* Oxonian Press, 1984.

[7] Michele de Franchis. *Un teorema sulle involuzioni irrazionali.* Rend. Circ. Matem. Palermo 36, 368 (1913).

[8] Michel Brion. *On Automorphisms and Endomorphisms of Projective Varieties.* In *Automorphisms in birational and affine geometry, volume* 79 *of Springer Proc. Math. Stat.*, pages 59–81. Springer, Cham, 2014.