KUBASCH ALEXANDER

KOMPAKT KOMPLEX SOKASÁGOK ENDOMORFIZMUSAI

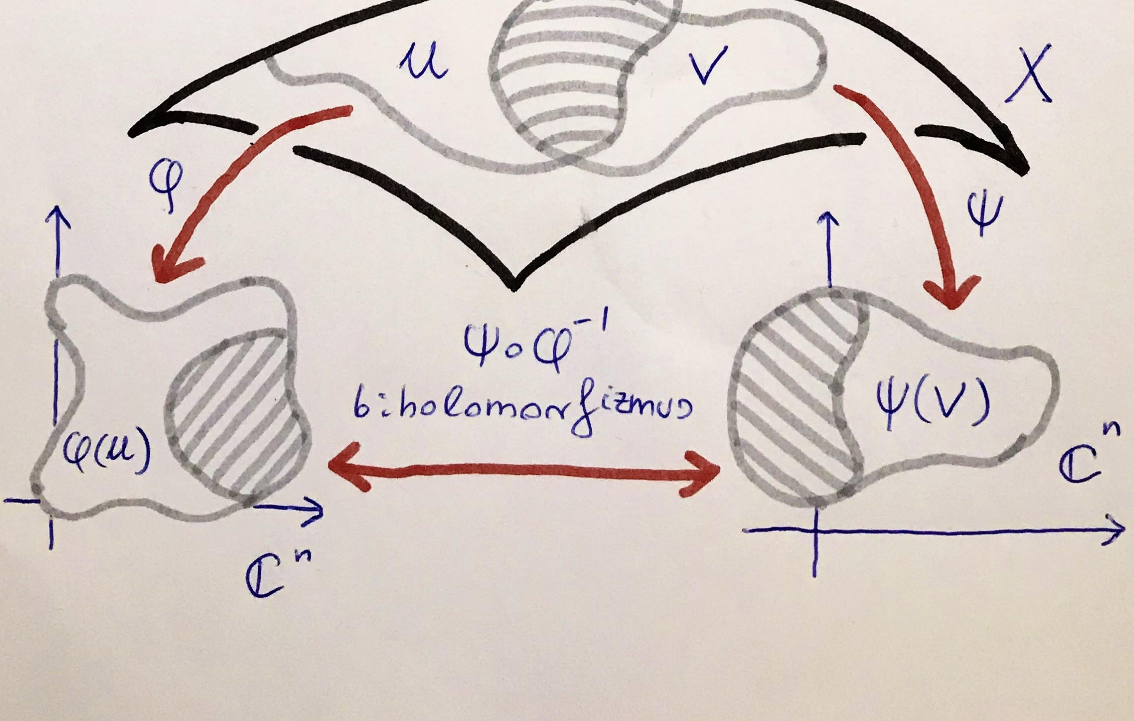
TÉMAVEZETŐ: SZŐKE RÓBERT

---

1. A KÉRDÉS

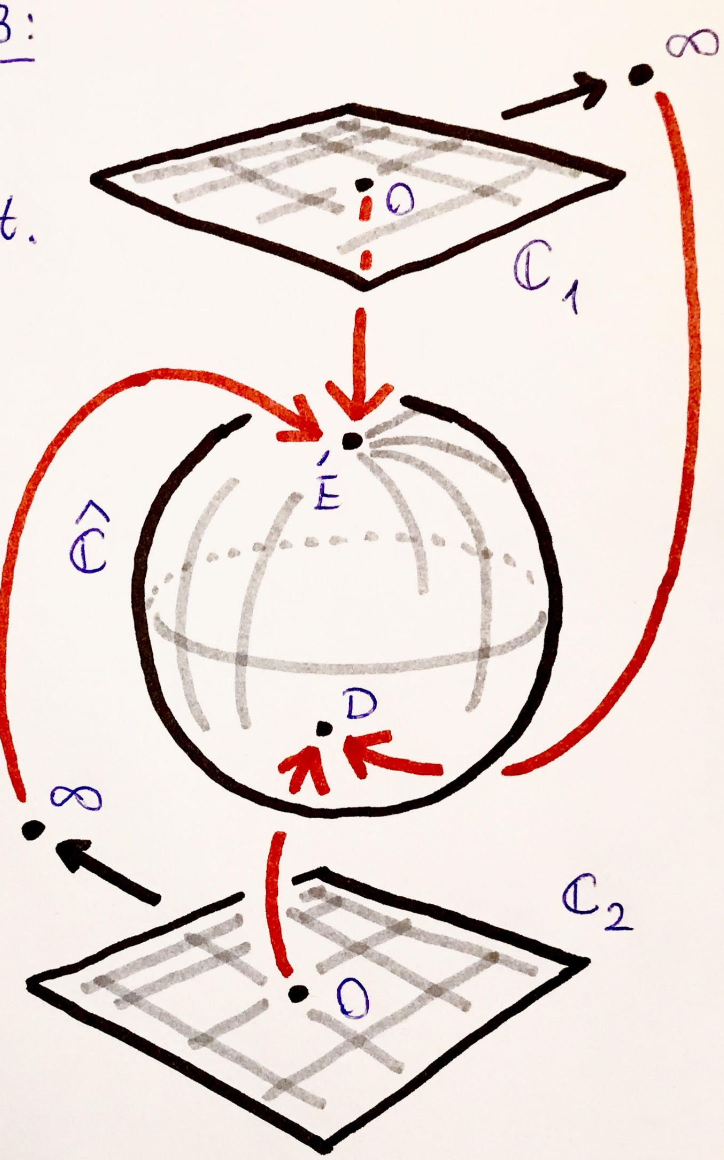
DEF KOMPLEX SOKASÁG: X topologikus tér: $\forall x \in X$: $\exists\, \mathcal{U} \subseteq X$ nyílt: $x \in \mathcal{U}$ és $\exists$ egy $\varphi: \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{C}^n$ homeomorfizmus.

Továbbá:



PL **A RIEMANN-GÖMB:**

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C}_1 \sqcup \mathbb{C}_2 \Big/ \text{ragaszt.}$$



Ragasztás:

$$\mathbb{C}_1^* \longleftrightarrow \mathbb{C}_2^*$$

$$z \longleftrightarrow 1/z$$

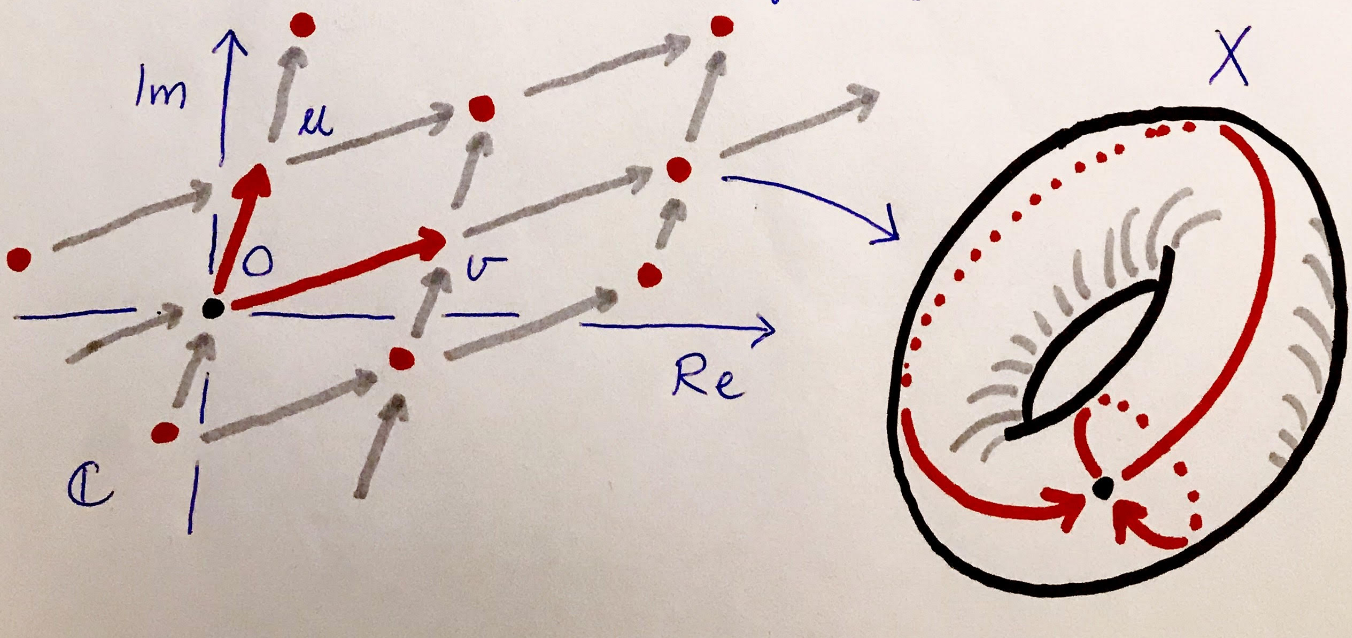
PL **KOMPLEX TÓRUSZ:**

Vál.: $u, v \in \mathbb{C}$

$\mathbb{R}$-lin flen.ek

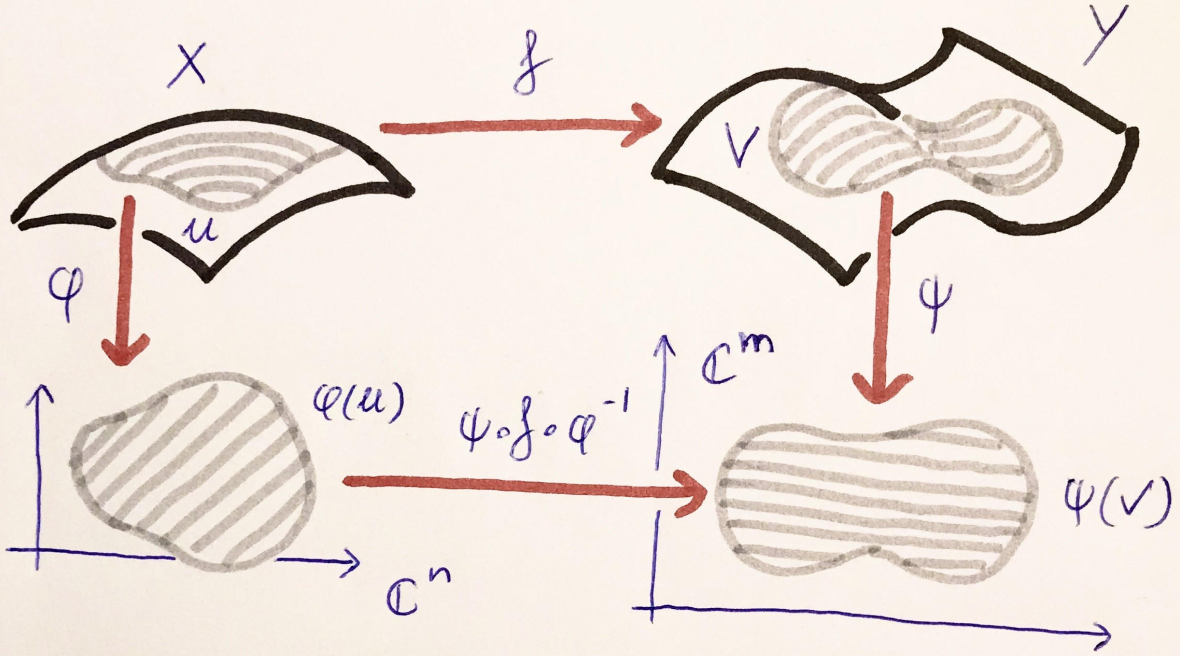
$$\Gamma := \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v$$

$X := \mathbb{C}/\Gamma$ faktorcsoport.



DEF **HOLOMORF LEKÉPEZÉS:** $f: X \longrightarrow Y$

holomorf, ha $\forall\ (\mathcal{U}, \varphi)$ X-térkép és $\forall\ (V, \psi)$ Y-térkép esetén: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ holomorf.



ÁLL $f: X \to Y$ holomorf $\iff$ $\forall\, \mathcal{U} \subseteq Y$ nyílt és $\forall\, h: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ holomorf fv. esetén $h \circ f: f^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorf. $\square$

DEF **AZ ENDOMORFIZMUS-MONOID:**

$$\mathrm{End}(X) := \{ f: X \to X \text{ holomorf} \}.$$

Ha X kompakt komplex sokaság, mi mondható az $\mathrm{End}(X)$ monoidról?

2. PÉLDÁK

A RIEMANN-GÖMB: $\mathrm{End}(\hat{\mathbb{C}}) = \coprod_{n=0}^{\infty} E_n$, ahol E_n $(2n+1)$-dimenziós komplex sokaság és $E_0 = \hat{\mathbb{C}}$.

KOMPLEX TÓRUSZOK: Ha X tórusszal homeomorf, akkor $\mathrm{End}(X) = \coprod_{n=0}^{\infty} X$.

HIPERBOLIKUS GÖRBÉK: Ha X egy $(g>1)$-génuszú felülettel homeomorf, akkor $\mathrm{End}(X) = X \amalg \{\text{végës sok pont}\}$.

TERMÉSZETES KÉRDÉSEK:

1.) $\mathrm{End}(X)$ mindig komplex sokaság?
VÁLASZ: majdnem.

2.) X mindig része $\mathrm{End}(X)$-nek? Ha igen, meghatározza $\mathrm{End}(X)$ X-et?
VÁLASZ: igen.

3. KOMPLEX TÉR

DEF **KÉVE:** Legyen X topologikus tér.

$\mathcal{A}_X : \{X \text{ nyílt halmazai}\} \to$ Abel-csoportok.

Ha $U \subseteq V \Rightarrow r_U^V : \mathcal{A}_X(V) \to \mathcal{A}_X(U)$
csoport-homomorfizmus

+ technikai feltételek.

PL X top. tér: $\mathcal{C}_X^{\mathbb{R}} : \mathcal{C}_X^{\mathbb{R}}(U) := \mathcal{C}(U; \mathbb{R})$

$\mathcal{C}_X^{\mathbb{C}} : \mathcal{C}_X^{\mathbb{C}}(U) := \mathcal{C}(U; \mathbb{C})$.

X sima sok: $\mathcal{C}_X^{\infty} : \mathcal{C}_X^{\infty}(U) := \mathcal{C}^{\infty}(U; \mathbb{R})$

X kompl. sok: $\mathcal{O}_X : \mathcal{O}_X(U) := \mathcal{O}(U; \mathbb{C})$.

MJ Kéve-homomorfizmus, rész-kéve, faktor-kéve, stb...

DEF **GYŰRŰZÖTT TÉR:** $(X, \mathcal{A}_X)$ pár, ahol $\mathcal{A}_X$ gyűrűk egy kévéje az X topologikus tér felett.

MJ Mostantól: $\mathcal{A}_X \leq \mathcal{C}_X^{\mathbb{C}}$ részkéve.

DEF GYŰRŰZÖTT TEREK MORFIZMUSA

$(X, \mathcal{A}_X)$, $(Y, \mathcal{A}_Y)$ gyűrűzött terek.

$f: X \to Y$ morfizmus, ha folyt.

és $\forall\, \mathcal{U} \subseteq Y$ nyílt és $\forall\, h \in \mathcal{A}_Y(\mathcal{U})$

esetén $h \circ f \in \mathcal{A}_X(f^{-1}(\mathcal{U}))$.

PL X komplex sokaság $\Rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ gyűrűzött tér és

$f: X \to Y$ holomorf $\Longleftrightarrow$ f gyűrűzött terek közti morfizmus.

DEF LOKÁLIS MODELL: $D \subseteq \mathbb{C}^n$ tartom.,

$f_1, \dots, f_k : D \to \mathbb{C}$ holomorf fv.-ek.

$X := \{ z \in D \mid f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0 \}$.

$\mathcal{J} := \sum_{j=1}^{k} f_j \mathcal{O}_D \triangleleft \mathcal{O}_D$ és $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_D / \mathcal{J} \big|_X$

$\rightsquigarrow (X, \mathcal{O}_X)$ lokális modell.

DEF **KOMPLEX TÉR:** $(X, \mathcal{O}_X)$ gyűrűzött tér: $\forall x \in X$: $\exists \mathcal{U} \subseteq X$ nyílt: $x \in \mathcal{U}$ és $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}})$ mint gyűrűzött tér izomorf egy lok. modellel.

PL **KOMPLEX TEREK:**

- Komplex sokaságok
- Projektív algebrai varietások
- Komplex terek nyílt részhalmazai

DEF **HOLOMORF LEKÉPEZÉS:** Két komplex tér közti gyűrűzött tér-morfizm.

TÉTEL (A. DOUADY, 1966) X kompakt komplex sokaság. Ekkor

1.) $\mathrm{End}(X)$ komplex tér, amin a topológia: egyenletes konverg.

2.) $K: \mathrm{End}(X) \times X \longrightarrow X$
$(f, x) \longmapsto f(x)$ holomorf.

3.) $\mathrm{End}(X) \times \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(X)$
$(f, g) \longmapsto f \circ g$ holomorf.

4. MIT MOND END(X) X-RŐL?

TÉTEL: X és Y kompakt komplex sok., $\Phi : End(X) \to End(Y)$ bihol. monoid-izomorfizmus. $\Rightarrow$ Φ indukál egy $\varphi : X \to Y$ biholo.-t.

BIZ: (vázlat)

$C_X := \{\text{konstans leképezések}\} \subseteq End(X)$,

$\alpha : C_X \to X$ a természetes bijekció.

1. lépés: $C_X \subseteq End(X)$ összefüggőségi komponensek uniója $\Rightarrow$ C_X maga is komplex tér.

2. lépés: α holomorf:

$$C_X \cong C_X \times \{x_0\} \hookrightarrow End(X) \times X \xrightarrow{K} X$$

holomorf és nem más mint α.

3. lépés: C_X valójában komplex sokaság.

4. lépés: Azonos-dimenziós komplex sokaságok közti holomorf bijekció automatikusan biholomorf.

tehát: $C_X \cong X$ biholomorfak.

5. lépés: $\Phi : \mathrm{End}(X) \to \mathrm{End}(Y)$ biholo. monoid-izomorfizmus.

$$C_X = \{ f \in \mathrm{End}(X) \mid \forall g \in \mathrm{End}(X) : f \circ g = f \}.$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(C_X) = C_Y \text{ és } \Phi|_{C_X} : C_X \xrightarrow{\cong} C_Y$$

biholomorf.

$$\Rightarrow \quad \varphi : X \xrightarrow{\cong} C_X \xrightarrow{\Phi|_{C_X}} C_Y \xrightarrow{\cong} Y$$

biholomorfizmus. $\square$

MJ Mi történik, ha X komplex sok. helyett kompakt komplex tér?

5. FENNMARADÓ KÉRDÉSEK

1.) End(X) mindig komplex sokaság?

2.) M. Brion 2013-as projektív varietások endomorfizmusairól szóló cikkének mely állításai általánosíthatók a kompakt komplex sokaságok esetére?

<u>pl.</u>: $\{e = e^2 \in \mathrm{End}(X)\} \xleftrightarrow{\text{bij}} \{\mathrm{End}(X)$ max. összefüggő részcsoportjai$\} \xleftrightarrow{\text{bij}}$ $\{X$ holomorf retraktumai$\}$.

3.) Ha $Y \subseteq X$ analitikus altér, (vagy komplex részsokaság) analitikus altér-e $\mathrm{Hol}(X, Y) \subseteq \mathrm{End}(X)$?

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!