KORLÁTOS FOKSZÁMÚ HIPERGRÁFOK ÁRNYÉKA

JUNG ATTILA
TÉMAVEZETŐ: KATONA GYULA

J.A.: Hallgató, Matematikus mesterszak (3. félév), ELTE
Email cím: jungattila@gmail.com

K.Gy.: Kutató Professzor Emeritus, Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Kivonat. Hipergráfok árnyékát vizsgáljuk abban az esetben, ha a hipergráf maximális fokszáma valamilyen korlát alatt marad. Az árnyék és a hipergráf méretének hányadosára, az árnyékhányadosra adunk alsó becslést különböző fokszámkorlátok esetén. Megvizsgáljuk a felmerülő egyenlőtlenségeket egyenlőséggel teljesítő extremális hipergráfok kérdését is. A fő eszközeink a Kruskal-Katona Árnyék Tétel és Sperner egy lemmája az árnyékhányadosról.

1. Bevezető

Jelen dolgozatban a korlátos fokszámú hipergráfok árnyékára keresünk alsó becslést. Új eredmények az 1.2, 1.3, 1.4 tételek és a 2.4 lemma.

Egy $[n] = \{1, \ldots, n\}$ alaphalmaz feletti k-uniform $\mathcal{H}$ hipergráfon olyan halmazrendszert értünk, amelynek elemei az $[n]$ halmaz k elemű részhalmazai közül kerülnek ki. Jelölésben $\mathcal{H} \subseteq \binom{[n]}{k}$. $\mathcal{H}$ árnyékán azt a $\sigma(\mathcal{H}) \subseteq \binom{[n]}{k-1}$, $(k-1)$-uniform hipergráfot értjük, amire $\sigma(\mathcal{H}) = \{B \in \binom{[n]}{k-1} | \exists A \in \mathcal{H} : B \subset A\}$. Ha $k \geq 3$, akkor $\mathcal{H}$ elemeit hiperéleknek, $\sigma(\mathcal{H})$ elemeit éleknek nevezzük.

Ha például $\mathcal{H}$ egy 3-uniform hipergráf az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon és $\mathcal{H} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$, akkor az árnyéka $\sigma(\mathcal{H}) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$, vagyis az az egyszerű gráf lesz, amelynek csúcshalmaza $\{1, 2, 3, 4\}$, és $\{1, 4\}$ kivételével az összes élet tartalmazza.

Legyen a $\mathcal{H}$ hipergráf elemszáma $|\mathcal{H}|$, az árnyékának elemszáma pedig $|\sigma(\mathcal{H})|$. A Kruskal-Katona Árnyék Tétel pontos alsó becslést ad $|\sigma(\mathcal{H})|$-ra $|\mathcal{H}|$ függvényében [Kru63, Kat68]. De mit mondhatunk az árnyék méretéről, ha azt is feltesszük, hogy $\mathcal{H}$ maximális fokszáma, $\Delta(\mathcal{H})$ valamilyen f korlát alatt marad? Jelen dolgozatban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy a $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$ árnyékhányadosra milyen alsó becslést tudunk adni, ha $\mathcal{H}$ maximális fokszámát, $\Delta(\mathcal{H})$-t korlátozzuk.

Ha semmi kikötést nem teszünk $\mathcal{H}$-ra, akkor az árnyékhányados akármilyen kicsi lehet. Legyen például $\mathcal{H} = \binom{[n]}{k}$ a teljes k-uniform gráf n ponton. Ekkor $|\mathcal{H}| = \binom{n}{k}$ és $|\sigma(\mathcal{H})| = \binom{n}{k-1}$, vagyis $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} = \frac{k}{n-k+1}$. Ahogy n-et növeljük, ez tetszőlegesen közel kerülhet nullához. Tehát valamilyen megszorítással kell élnünk a szóba jövő hipergráfok halmazára nézve, ha nemtriviális alsó becslést szeretnénk adni az árnyékhányadosra. Katona Gyula olyan hipergráfok árnyékhányadosára adott éles alsó becslést, ahol bármely két hiperél metszete legalább egy előre rögzített l szám [Kat64], Uwe Leck pedig a reprezentánsrendszerrel rendelkező hipergráfok árnyékhányadosának minimumát határozta meg [Lec93]. Mi a maximális fokszámról tesszük fel, hogy korlátos, amivel szintén kizárhatjuk például a fenti, nullához tartó árnyékhányadosú hipergráf sorozatot, ugyanis $\Delta(\binom{[n]}{k}) = \binom{n-1}{k-1}$, ami tart a végtelenbe n-nel. Mit mondhatunk az árnyékhányadosról, ha feltesszük, hogy $\Delta(\mathcal{H}) \leq f$ valamilyen f-re?

Vizsgáljuk először a fokszámkorlátos 2-uniform hipergráfok, azaz a gráfok esetét. Gráfok esetében az árnyék elemei megfeleltethetők a gráf nem-izolált pontjainak. Legyen G egy gráf n csúcson e éllel. Tegyük fel, hogy G-ben minden csúcs foka legfeljebb f. Az a kérdés, hogy a csúcsok száma legalább hányszorosa az élek számának. Mivel minden élre pontosan két csúcs illeszkedik és minden csúcsra legfeljebb f él illeszkedik, ezért az illeszkedő csúcs-él párokat kétféleképp megszámolva $fn \geq 2e$ adódik. Ebből következik is az első tételünk.

1.1. Tétel. *Ha $\mathcal{H}$ egy 2-uniform hipergráf f fokszámkorláttal, akkor*

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq \frac{2}{f}. \tag{1}$$

A tétel fenti pár soros bizonyításából az is kiolvasható, hogy az (1) egyenlőtlenséget pontosan a reguláris gráfok teljesítik egyenlőséggel. Az árnyékhányadosra adott becsléseken kívül érdekelnek minket a becsléseket egyenlőséggel teljesítő extremális hipergráfok. A következő tételeket informálisan úgy foglalhatnánk össze, hogy az adott fokszámkorlát által megengedett lehető legnagyobb teljes hipergráf közel extremális. Sajnos nem minden esetben, sőt van olyan fokszámkorlát is, ami a legkisebb nemtriviális teljes hipergráfot is kizárja. Ez utóbbi esetben, amikor $f < k$ és ezért már $\binom{[k+1]}{k}$ is ki van zárva a lehetséges hipergráfok köréből, az árnyékhányadosra lényegesen különböző becslést tudunk adni, mint $f \geq k$ esetén. Nézzük először azt az esetet, amikor a teljes hipergráfok ki vannak zárva a fokszámkorlát miatt.

1.2. Tétel. *Ha $1 \leq f < k$ és $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf f fokszámkorláttal, akkor*

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq k - \frac{f-1}{2}. \tag{2}$$

A tétel 3. fejezetben közölt bizonyításából az is kiderül, hogy ebben az esetben is a teljes hipergráfhoz bizonyos értelemben nagyon hasonlító hipergráfok extremálisak. A tétel bizonyításából kiolvasható, de rövid számolással is ellenőrizhető, hogy tetszőleges $\mathcal{H} \subsetneq \binom{[k+1]}{k}$, $|\mathcal{H}| = f$ egyenlőséggel teljesíti a (2) egyenlőtlenséget.

Mi történik, ha a fokszámkorlát legalább k, és így már megengedettek teljes hipergráfok is? Ha $\mathcal{H}$ a teljes k-uniform hipergráf $(t+1)$ csúcson, azaz $\mathcal{H} = \binom{[t+1]}{K}$, akkor $\Delta(\mathcal{H}) = \binom{t}{k-1}$ és $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} = \frac{\binom{t+1}{k-1}}{\binom{t+1}{k}} = \frac{k}{t-k+2}$. A következő tétel azt mondja ki, hogy az ilyen hipergráfok nem csak $f = \binom{t}{k-1}$ esetén extremálisak, hanem még jóval nagyobb fokszámkorlát esetén sem tudunk jobbat, mint a $\binom{[t+1]}{k}$ hipergráf.

1.3. Tétel. *Legyenek $t \geq k \geq 3$ egész számok, és $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf f fokszámkorláttal. Ha*

$$f \leq \binom{t}{k-1} + \binom{t - \lceil\frac{(t+1)}{k-1}\rceil}{k-2} + \binom{t - \lceil\frac{2(t+1)}{k-1}\rceil}{k-3} + \ldots + \binom{t - \lceil\frac{(k-2)(t+1)}{k-1}\rceil}{1},$$

akkor

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq \frac{k}{t-k+2}.$$

A 1.3 tételt is a 3. fejezetben bizonyítjuk. A korlátos fokszámú hipergráfok árnyékhányadosának kérdését visszavezetjük a korlátos méretű hipergráfok árnyékhányadosának kérdésére, amivel pedig előtte, a 2. fejezetben foglalkozunk.

Lehetséges, hogy bármilyen fokszámkorlát esetén a megengedhető legnagyobb teljes hipergráf extremális? Sajnos nem, amint azt a következő tétel is mutatja.

1.4. Tétel. *Létezik k-uniform $\mathcal{H}$ hipergráf f fokszámkorláttal, amire*

$$f \leq \binom{t}{k-1} + \binom{t+1-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}$$

és

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} < \frac{k}{t-k+2}.$$

A 1.4 tétel 3. fejezetben közölt bizonyítása egy explicit konstrukciót ad ilyen feltételeknek eleget tevő $\mathcal{H}$-ra. Mit tudtunk meg ezzel a teljes hipergráfok extremalitásáról? $\binom{[t+1]}{k}$ extremális, ha $\binom{t}{k-1} \leq f \leq \binom{t}{k-1} + \binom{t-\lceil\frac{t+1}{k-1}\rceil}{k-2}$, sőt még egy kicsit bővebb intervallumon is. Ha viszont $\binom{t}{k-1} + \binom{t+1-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2} \leq f < \binom{t+1}{k-1}$, akkor $\binom{[t+1]}{k}$ már nem extremális, $\binom{[t+2]}{k}$ pedig még ki van zárva a fokszámkorlát miatt. Ezen az intervallumon az extremális hipergráfok kérdése nyitott marad, azt azonban tudjuk, hogy az árnyékhányadosuk valahova a $[\frac{k}{t-k+3}, \frac{k}{t-k+2})$ intervallumba esik.

2. Árnyék Tétel és árnyékhányados

Ebben a fejezetben a hipergráfokat nem a maximális fokszámuk, hanem a méretük alapján osztályozzuk. A 2.4 lemmával alsó becslést fogunk adni a hipergráfok mérete alapján az árnyékhányadosukra, ehhez a témakör klasszikus tételét, a Kruskal-Katona Árnyék Tételt fogjuk használni, aminek kimondása előtt szükségünk van némi előkészületre. Az első lemmánk arról szól, hogy pozitív egész számok hogyan írhatók fel bizonyos speciális binomiális együtthatók összegeként.

2.1. Lemma (k-binomiális reprezentáció egyértelműsége)**.** *Ha m és k pozitív egész számok, akkor m egyértelműen kifejezhető a következő alakban:*

$$m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{a_t}{t},$$

ahol $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_t \geq t \geq 1$.

Ezt az alakot az m szám k-binomiális reprezentációjának nevezzük.

A tétel bizonyítása megtalálható például [Kat68]-ban (Lemma 1). A számok k-binomiális reprezentációja kulcsszerepet játszik az Árnyék Tételben. Segítségükkel definiálható az árnyékfüggvény.

1. Definíció (Árnyékfüggvény)**.** Legyen $m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots + \binom{a_t}{t}$ az m szám k-binomiális reprezentációja. Ekkor a k-ad rendű árnyékfüggvény m helyen felvett értéke

$$F_k(m) = \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \ldots + \binom{a_t}{t-1}.$$

A k-ad rendű árnyékfüggvény azt mondja meg, hogy egy m hiperélből álló k-uniform hipergráf árnyéka legalább mekkora lesz. Ez az állítás a Joseph Kruskal és Katona Gyula által a hatvanas években felfedezett Árnyék Tétel [Kru63, Kat68].

2.2. Tétel (Kruskal - Katona Árnyék Tétel)**.** *Tetszőleges $\mathcal{H}$ k-uniform hipergráfra*

$$|\sigma(\mathcal{H})| \geq F_k(|\mathcal{H}|).$$

Továbbá, ha $m \leq \binom{a}{k}$, akkor létezik $\mathcal{H} \subseteq \binom{[a]}{k}$, $|\mathcal{H}| = m$ hipergráf, amire

$$|\sigma(\mathcal{H})| = F_k(|\mathcal{H}|).$$

A tétel eredeti, bonyolultabb bizonyításai után több viszonylag rövid bizonyítás is született. Ilyen bizonyítást adott például David E. Daykin [Day74] vagy Frankl Péter [Fra84].

Ezzel a tétellel igazából megtudtuk a pontos értékét az árnyékhányadosnak is a fokszámkorlát nélküli esetben. Az $\frac{F_k(m)}{m}$ hányados az árnyékfüggvény alakja miatt mégsem becsülhető minden probléma nélkül, ehhez szükségünk lesz egy még korábbi eredményre is. Az árnyékhányadosra adott első becslés Emanuel Spernertől származik 1928-ból [Spe28] és a tartalmazásmentes halmazrendszerek elemszámáról szóló

Sperner Tétel eredeti bizonyításában kerül elő (természetesen nem pont ebben a formájában az árnyékfüggvényre kimondva).

2.3. Lemma (Sperner)**.** *Legyenek $a \geq k > 0$ egész számok. Ha $0 < m \leq \binom{a}{k}$ egész szám, akkor*

$$\frac{F_k(m)}{m} \geq \frac{k}{a-k+1}.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H} \subseteq \binom{[a]}{k}$ olyan hipergráf, amire $|\mathcal{H}| = m$ és $|\sigma(\mathcal{H})| = F_k(m)$. A 2.2 Tételből tudjuk, hogy ilyen létezik. Számoljuk meg $\mathcal{H}$-ban a tartalmazkodó él-hiperél párokat. Egyrészről minden hiperél k élet tartalmaz, tehát ez a szám $k|\mathcal{H}|$. Másrészt minden élet legfeljebb $a-k+1$ hiperél tartalmazhat, tehát a tartalmazkodó él-hiperél párok száma legfeljebb $(a-k+1)|\sigma(\mathcal{H})|$. Vagyis $|\sigma(\mathcal{H})|(a-k+1) \geq k|\mathcal{H}|$, ami átrendezve

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq \frac{k}{a-k+1}.$$

□

Egy kis munkával ezt az eredményt tovább erősíthetjük. Erről szól a következő lemma.

2.4. Lemma (Az árnyékhányados becslése)**.** *Legyenek $a \geq k > 0$ egész számok. Ha*

$$0 < m \leq \sum_{u=0}^{k-1} \binom{a - \lceil \frac{u(a+1)}{k} \rceil}{k-u},$$

akkor

$$\frac{F_k(m)}{m} \geq \frac{k}{a-k+1}.$$

Bizonyítás. l szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy

$$0 < m \leq \sum_{u=0}^{l} \binom{a - \lceil \frac{u(a+1)}{k} \rceil}{k-u} \implies \frac{F_k(m)}{m} \geq \frac{k}{a-k+1}. \tag{3}$$

Először is, $l = 0$ esetén a (3) állítás éppen a 2.3 lemma.

Most tegyük fel, hogy valamilyen l-re a (3) állítás igaz és nézzük az $l+1$ esetet.

Legyen tehát $m = \sum_{u=0}^{l} \binom{a-\lceil \frac{u(a+1)}{k} \rceil}{k-u} + x$, ahol $0 < x \leq \binom{a-\lceil \frac{(l+1)(a+1)}{k} \rceil}{k-l-1}$, és legyen az x szám $(k-l-1)$-binomiális reprezentációja $x = \sum_{s=l+1}^{k-t} \binom{x_{k-s}}{k-s}$. Tudjuk, hogy ekkor $x_{k-l-1} \leq a - \lceil \frac{(l+1)(a+1)}{k} \rceil$, különben $x > \binom{a-\lceil \frac{(l+1)(a+1)}{k} \rceil}{k-l-1}$ lenne. Mivel $a - \lceil \frac{(l+1)(a+1)}{k} \rceil < a - \lceil \frac{l(a+1)}{k} \rceil$, ezért $a > a - \lceil \frac{a+1}{k} \rceil > \ldots > a - \lceil \frac{l(a+1)}{k} \rceil > x_{k-l-1} > \ldots > x_t$, tehát m k-binomiális reprezentációja $m = \sum_{u=0}^{l} \binom{a-\lceil \frac{u(a+1)}{k} \rceil}{k-u} + \sum_{s=l+1}^{k-t} \binom{x_{k-s}}{k-s}$. Azaz $F_k(m) = F_k(m-x) + F_k(x)$. Ebből adódóan

$$\frac{F_k(m)}{m} = \frac{F_k(m-x)+F_k(x)}{m-x+x} = (1-\lambda)\frac{F_k(m-x)}{m-x} + \lambda\frac{F_k(x)}{x},$$

ahol $\lambda = \frac{x}{m} \in (0,1)$, tehát $\frac{F_k(m)}{m}$ felírható $\frac{F_k(m-x)}{m-x}$ és $\frac{F_k(x)}{x}$ konvex kombinációjaként, így elég erre a két törtre belátni a kívánt egyenlőtlenséget. $\frac{F_k(m-x)}{m-x} \geq \frac{k}{a-k+1}$ az indukciós hipotézis miatt teljesül, $\frac{F_k(x)}{x}$-re pedig használhatjuk a 2.3 lemmát, ami azt mondja ki, hogy mivel $x \leq \binom{a-\lceil\frac{(l+1)(a+1)}{k}\rceil}{k-l-1}$, ezért

$$\frac{F_k(x)}{x} \geq \frac{k-l-1}{a-\lceil\frac{(l+1)(a+1)}{k}\rceil-k+l+2} \geq \frac{k-l-1}{a-\frac{(l+1)(a+1)}{k}-k+l+2},$$

amiről rövid számolás után adódik, hogy éppen $\frac{k}{a-k+1}$. Ezzel végére értünk az indukciós lépésnek és bebizonyítottuk a 2.4 lemmát. □

3. Árnyékhányados korlátos fokszám esetén

Az 1.2 tétel bizonyítása. Megmutatjuk, hogy ha egy k-uniform hipergráf minden foka legfeljebb $f < k$, akkor az árnyékhányadosa legalább $k - \frac{f-1}{2}$. Ehhez megnézzük az árnyékhányados viselkedését az összefüggőségi komponenseken, ahol összefüggőség alatt a következőt értjük.

2. Definíció. Egy $\mathcal{H}$, k-uniform hipergráf $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ részhalmazát összefüggőnek mondjuk, ha bármely $H, F \in \mathcal{H}'$-re létezik $H = H_1, H_2, \ldots, H_t = F$ hiperél sorozat, amelyre minden i-re $H_i \in \mathcal{H}'$ és $|H_i \cap H_{i+1}| = k-1$.

A maximális összefüggő részhalmazokat összefüggőségi komponenseknek nevezzük.

Ha $\mathcal{H}'$ és $\mathcal{H}''$ két különböző összefüggőségi komponens, akkor árnyékuk diszjunkt, ezért elég az árnyékokat külön-külön vizsgálni. Mivel a hipergráf csúcsszámára vonatkozóan nem tettünk semmilyen megszorítást, feltehetjük azt is, hogy két összefüggőségi komponens csúcshalmaza teljesen diszjunkt. A bizonyítás kulcsa annak megmutatása, hogy egy összefüggőségi komponensben nem lehet túl sok hiperél. Erről szól a következő lemma.

3.1. Lemma. *Ha $f < k$ és $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf f fokszámkorláttal, akkor egy összefüggőségi komponense legfeljebb f hiperélből áll.*

Bizonyítás. Induljunk ki egy tetszőleges hiperélből, nevezzük ezt H_1-nek. Álljon a H_1 összefüggőségi komponense a $H_1, H_2, \ldots, H_t$ hiperélekből és rendezzük őket olyan módon, hogy minden i-re H_i szomszédos a $H_1, \ldots, H_{i-1}$ hiperélek valamelyikével. Ekkor igaz lesz a következő

3.2. Állítás. $\forall i \in [t] : |\cap_{j=1}^{i} H_j| \geq k - i + 1$.

Bizonyítás. Az állítást i szerinti indukcióval bizonyítjuk. Ha $i = 1$, akkor $|H_0| = k$ természetesen igaz.

Tegyük most fel, hogy $|\cap_{j=1}^{i-1} H_j| \geq k-i+2$. Tudjuk, hogy H_i-nek van szomszédja a $H_1, \dots, H_{i-1}$ hiperélek között, legyen ez mondjuk H_s. Mivel pontosan egy elem van, amit H_s tartalmaz, de H_i nem, azért ha H_i-t hozzávesszük a metszethez, annak elemszámát legfeljebb eggyel csökkentheti, azaz $|\cap_{j=0}^{i} H_j| \geq k-i+1$. □

Tegyük most fel indirekt, hogy $t \geq f+1$ és nézzük a $H_1, \dots, H_f$ hiperélekből álló halmazrendszert. Mivel $|\cap_{j=1}^{f+1} H_j| \geq k-f > 0$, ezért van olyan elem, amit mind az $f+1$ hiperél tartalmaz, ellentmondásban azzal, hogy minden csúcs foka legfeljebb f. Vagyis $t \leq f$, amivel a 3.1 lemma bizonyításának végére értünk.

□

Tehát $\mathcal{H}$ minden összefüggőségi komponense legfeljebb f hiperélből áll. Tekintsünk egy ilyen összefüggőségi komponenst, ami a $H_1, \dots, H_t$ hiperélekből áll. Mekkora lesz legalább az árnyék mérete? H_1 tartalmaz k élet. H_2 tartalmaz legalább $(k-1)$ olyan élet, amit H_1 nem tartalmaz. És tetszőleges i-re H_i tartalmaz legalább $(k-i+1)$ olyan élet, amit $\cup_{j=1}^{i-1} H_j$ nem tartalmaz. Tehát az árnyék mérete legalább $\sum_{i=1}^{t} k-i+1 = kt - \binom{t}{2}$. Ez az eset pedig elő is fordulhat, ha bármely két hiperél szomszédos, és a hiperél pároknak mind különböző a metszete.

Mekkora lesz ilyenkor az árnyékhányados? $\frac{kt-\binom{t}{2}}{t} = k - \frac{t-1}{2}$. Ez t-ben monoton csökken, tehát az árnyékhányados akkor minimális, ha az összefüggőségi komponens a lehető legtöbb hiperélből áll, és ekkor éppen $k-\frac{f-1}{2}$. Ha az árnyékhányados minden összefüggő komponensen legalább $k-\frac{f-1}{2}$, akkor az egész hipergráfon is legalább ennyi. Ezzel beláttuk az 1.2 tételt. A becslés élességét tetszőleges $\mathcal{H} \subset \binom{[k+1]}{k}$, $|\mathcal{H}| = f$ hipergráf bizonyítja.

□

Az 1.3 tétel bizonyítása. A bizonyítás alapötlete az a gondolat, hogy megnézzük az egy pont által lefogott hiperélek és élek arányát. Ha ezt tudjuk minden pontra, akkor ennek segítségével kiszámolhatjuk az egész hipergráf árnyékhányadosát. Ha $v \in [n]$ a $\mathcal{H}$ hipergráf egy csúcsa, akkor legyen $\mathcal{H}_v$ a v által lefogott hiperélek által alkotott hipergráf. Tudjuk, hogy $k|\mathcal{H}| = \sum_{v \in [n]} |\mathcal{H}_v|$, mivel minden hiperélet éppen k csúcs fog le. Hasonlóan adódik, hogy $(k-1)|\sigma(\mathcal{H})| = \sum_{v\in[n]} |\sigma(\mathcal{H})_v|$, mivel az árnyék minden élét $(k-1)$ pont fogja le. Tehát

$$\frac{(k-1)|\sigma(\mathcal{H})|}{k|\mathcal{H}|} = \frac{\sum_{v\in[n]} |\sigma(\mathcal{H})_v|}{\sum_{v\in[n]} |\mathcal{H}_v|}, \tag{4}$$

amiből számunkra annyi lesz fontos, hogy elég a $\frac{|\sigma(\mathcal{H})_v|}{|\mathcal{H}_v|}$ hányadosokra alsó becslést adni, hiszen

$$\frac{\sum_{v\in[n]}|\sigma(\mathcal{H})_v|}{\sum_{v\in[n]}|\mathcal{H}_v|} \geq \min_v \frac{|\sigma(\mathcal{H})_v|}{|\mathcal{H}_v|}. \tag{5}$$

Hátramaradt tehát az a feladat, hogy a $\frac{|\sigma(\mathcal{H})_v|}{|\mathcal{H}_v|}$ hányadosra alsó becslést adjunk. Mivel v-re adott egy fokszámkorlát, ezért ez a kérdés visszavezethető a korlátos elemszámú hipergráfok árnyékhányadosára, jelen esetben a 2.4 lemmára. Erről szól a következő lemma. Legyen $d(v)$ a v fokszáma $\mathcal{H}$-ban.

3.3. Lemma. *Legyen $t \geq k \geq 3$ és legyen v a $\mathcal{H}$ k-uniform hipergráf egy pontja. Ha*
$d(v) \leq \binom{t}{k-1} + \binom{t-\lceil\frac{(t+1)}{k-1}\rceil}{k-2} + \binom{t-\lceil\frac{2(t+1)}{k-1}\rceil}{k-3} + \ldots + \binom{t-\lceil\frac{(k-2)(t+1)}{k-1}\rceil}{1}$,
akkor

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})_v|}{|\mathcal{H}_v|} \geq \frac{k-1}{t-k+2}. \tag{6}$$

Bizonyítás. Hagyjuk ki $\mathcal{H}_v$ minden hiperéléből v-t. Így kapunk egy $(k-1)$-uniform $\mathcal{H}_{-v}$ hipergráfot, amire igaz egyrészt, hogy $|\mathcal{H}_{-v}| = |\mathcal{H}_v|$, másrészt, hogy $|\sigma(\mathcal{H}_{-v})| = |\sigma(\mathcal{H})_v|$. Mindkét egyenlőséget a $H \mapsto H \cup \{v\}$ kölcsönösen egyértelmű leképezés bizonyítja. Tudjuk továbbá, hogy v fokszámkorlátja miatt $|\mathcal{H}_{-v}| = |\mathcal{H}_v|$ legfeljebb $\binom{t}{k-1} + \binom{t-\lceil\frac{(t+1)}{k-1}\rceil}{k-2} + \binom{t-\lceil\frac{2(t+1)}{k-1}\rceil}{k-3} + \ldots + \binom{t-\lceil\frac{(k-2)(t+1)}{k-1}\rceil}{1}$. Alkalmazva a 2.4 lemmát $\mathcal{H}_{-v}$-re, a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})_v|}{|\mathcal{H}_v|} = \frac{|\sigma(\mathcal{H}_{-v})|}{|\mathcal{H}_{-v}|} \geq \frac{F_{k-1}(|\mathcal{H}_{-v}|)}{|\mathcal{H}_{-v}|} \geq \frac{k-1}{t-k+2},$$

ami éppen a 3.3 lemma állítása. □

Ezzel, összerakva (4)-et (5)-öt és (6)-ot, a következő sorral az 1.3 tétel bizonyításának a végére értünk

$$\frac{k-1}{k}\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} = \frac{\sum_{v\in[n]}|\sigma(\mathcal{H})_v|}{\sum_{v\in[n]}|\mathcal{H}_v|} \geq \min_v \frac{|\sigma(\mathcal{H})_v|}{|\mathcal{H}_v|} \geq \frac{k-1}{t-k+2}.$$

□

Az 1.4 tétel bizonyítása. Legyen $\mathcal{H}$ a következő hipergráf a $[t+2]$ csúcshalmazon. Legyen egyrészt $\binom{[t+1]}{k} \subset \mathcal{H}$, másrészt adjuk hozzá azokat az hiperéleket is $\mathcal{H}$-hoz, amiket úgy kapunk, hogy $\binom{[t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil]}{k-1}$ éleihez hozzávesszük egyenként a $(t+2)$ csúcsot. Azaz $\mathcal{H} = \binom{[t+1]}{k} \cup \{E \cup \{t+2\} : E \in \binom{[t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil]}{k-1}\}$.

Mekkora lesz ekkor $\Delta(\mathcal{H})$? A csúcsok fokszámaik szerint három osztályba sorolhatók. Először is $d(t+2) = \binom{t+1-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-1}$. Másodszor, ha

$t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil < v < t+2$, akkor $d(v) = \binom{t}{k-1}$. Harmadszor, ha $v \le t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil$, akkor $d(v) = \binom{t}{k-1} + \binom{t+1-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}$. Tehát $\Delta(\mathcal{H}) = \binom{t}{k-1} + \binom{t+1-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}$.

És mennyi lesz $\mathcal{H}$ árnyékának mérete? Van egyrészt az a $\binom{t+1}{k-1}$ él, amit $[t+1]$ feszít. Másrészt a további hozzávett hiperélek miatt az első $[t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil]$-ből választva egy $(k-2)$ elemű részhalmazt és hozzávéve a $(t+2)$ csúcsot, szintén az árnyék egy-egy elemét kapjuk. A $(t+2)$ csúcsot más árnyékbeli él nem tartalmazza, a $(t+2)$ csúcsot nem tartalmazó élek pedig mind részei az árnyéknak, ezért $|\sigma(\mathcal{H})| = \binom{t+1}{k-1} + \binom{t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}$. Nézzük most az árnyékhányadost.

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} = \frac{\binom{t+1}{k-1} + \binom{t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}}{\binom{t+1}{k} + \binom{t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-1}} = \lambda\frac{\binom{t+1}{k-1}}{\binom{t+1}{k}} + (1-\lambda)\frac{\binom{t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}}{\binom{t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-1}},$$

ahol $\lambda \in (0,1)$, tehát ez egy konvex kombináció. Az első tagja éppen $\frac{k}{t-k+2}$, a második tagja viszont

$$\frac{\binom{t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}}{\binom{t+2-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-1}} = \frac{k-1}{t+4-k-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil} < \frac{k-1}{t+3-k-\frac{t+2}{k}} = \frac{k}{t-k+2},$$

tehát

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} < \frac{k}{t-k+2},$$

amivel bebizonyítottuk az 1.4 tételt. □

Hivatkozások

[Day74] D.E. Daykin. A simple proof of the kruskal-katona theorem. *J. Combin. Theory, Ser. A*, 17:252–253, 1974.

[Fra84] Péter Frankl. A new short proof for the kruskal-katona theorem. *Discrete Mathematics*, 48(2-3):327–329, 1984.

[Kat64] Gyula Katona. Intersection theorems for systems of finite sets. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 15(3-4):329–337, 1964.

[Kat68] Gyula O.H. Katona. A theorem of finite sets. *Theory of Graphs*, pages 187–207, 1968.

[Kru63] Joseph Kruskal. The number of simplicies in a complex. pages 251–278. Univ. of California Press, 1963.

[Lec93] Uwe Leck. *On the minimum size of the shadow of set systems with a SDR.* Freie Universität Berlin. Fachbereich Mathematik, 1993.

[Spe28] Emanuel Sperner. Ein satz über untermengen einer endlichen menge. *Mathematische Zeitschrift*, 27(1):544–548, 1928.