Fokszámkorlátos hipergráfok árnyéka

Attila Jung
ELTE, Matematikus Msc.

témavezető:

Katona Gyula
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Hipergráfok árnyéka

Az árnyék definíciója

Legyen $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{k}$ egy k-uniform hipergráf. $\mathcal{H}$ árnyéka az a $\sigma(\mathcal{H})$, $(k-1)$-uniform hipergráf, amelyre

$$\sigma(\mathcal{H}) = \{B \in \binom{[n]}{k-1} | \exists A \in \mathcal{H} : B \subset A\}.$$

Hipergráfok árnyéka

Az árnyék definíciója

Legyen $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{k}$ egy k-uniform hipergráf. $\mathcal{H}$ árnyéka az a $\sigma(\mathcal{H})$, $(k-1)$-uniform hipergráf, amelyre

$$\sigma(\mathcal{H}) = \{B \in \binom{[n]}{k-1} | \exists A \in \mathcal{H} : B \subset A\}.$$

Kruskal '63, Katona '68: Árnyéktétel

Ha $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf m hiperéllel, akkor legalább akkora az árnyéka, mint a kolexikografikus rendezés szerinti első m hiperél által alkotott hipergráfnak.

Hipergráfok árnyéka

Az árnyék definíciója

Legyen $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{k}$ egy k-uniform hipergráf. $\mathcal{H}$ árnyéka az a $\sigma(\mathcal{H})$, $(k-1)$-uniform hipergráf, amelyre

$$\sigma(\mathcal{H}) = \{B \in \binom{[n]}{k-1} | \exists A \in \mathcal{H} : B \subset A\}.$$

Kruskal '63, Katona '68: Árnyéktétel

Ha $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf m hiperéllel, akkor legalább akkora az árnyéka, mint a kolexikografikus rendezés szerinti első m hiperél által alkotott hipergráfnak.

- Kolexikografikus rendezés: $A > B$, ha $A \triangle B$ legnagyobb eleme A-ban van.

Hipergráfok árnyéka

Az árnyék definíciója

Legyen $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{k}$ egy k-uniform hipergráf. $\mathcal{H}$ árnyéka az a $\sigma(\mathcal{H})$, $(k-1)$-uniform hipergráf, amelyre

$$\sigma(\mathcal{H}) = \{B \in \binom{[n]}{k-1} | \exists A \in \mathcal{H} : B \subset A\}.$$

Kruskal '63, Katona '68: Árnyéktétel

Ha $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf m hiperéllel, akkor legalább akkora az árnyéka, mint a kolexikografikus rendezés szerinti első m hiperél által alkotott hipergráfnak.

- Kolexikografikus rendezés: $A > B$, ha $A \triangle B$ legnagyobb eleme A-ban van.
- Bizonyításötlet (Frankl '84): balra tömörítés nem növeli az árnyékot.

Fokszámkorlátos hipergráfok árnyékhányadosa

- Mit mondhatunk speciális halmazrendszerek árnyékáról?

Fokszámkorlátos hipergráfok árnyékhányadosa

- Mit mondhatunk speciális halmazrendszerek árnyékáról?
- Katona '64: l-metsző hipergráfokban mekkora legalább $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$.

Fokszámkorlátos hipergráfok árnyékhányadosa

- Mit mondhatunk speciális halmazrendszerek árnyékáról?
- Katona '64: l-metsző hipergráfokban mekkora legalább $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$.
- Leck '93: Reprezentánsrendszerrel rendelkező hipergráfokban mekkora legalább $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$.

Fokszámkorlátos hipergráfok árnyékhányadosa

- Mit mondhatunk speciális halmazrendszerek árnyékáról?
- Katona '64: l-metsző hipergráfokban mekkora legalább $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$.
- Leck '93: Reprezentánsrendszerrel rendelkező hipergráfokban mekkora legalább $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$.
- Feltétel nélkül az árnyékhányados akármilyen kicsi lehet: ha $\mathcal{H} = \binom{[n]}{k}$ a teljes k-uniform hipergráf n csúcson, akkor $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} = \frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n-k+1}$.

Fokszámkorlátos hipergráfok árnyékhányadosa

- Mit mondhatunk speciális halmazrendszerek árnyékáról?
- Katona '64: l-metsző hipergráfokban mekkora legalább $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$.
- Leck '93: Reprezentánsrendszerrel rendelkező hipergráfokban mekkora legalább $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$.
- Feltétel nélkül az árnyékhányados akármilyen kicsi lehet: ha $\mathcal{H} = \binom{[n]}{k}$ a teljes k-uniform hipergráf n csúcson, akkor $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} = \frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n-k+1}$.
- Az Árnyéktétel által megadott extremális konstrukcióban a maximális fokszám $|\mathcal{H}|$-val tart a végtelenbe.

Fokszámkorlátos hipergráfok árnyékhányadosa

- Mit mondhatunk speciális halmazrendszerek árnyékáról?
- Katona '64: l-metsző hipergráfokban mekkora legalább $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$.
- Leck '93: Reprezentánsrendszerrel rendelkező hipergráfokban mekkora legalább $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$.
- Feltétel nélkül az árnyékhányados akármilyen kicsi lehet: ha $\mathcal{H} = \binom{[n]}{k}$ a teljes k-uniform hipergráf n csúcson, akkor $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} = \frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n-k+1}$.
- Az Árnyéktétel által megadott extremális konstrukcióban a maximális fokszám $|\mathcal{H}|$-val tart a végtelenbe.

Kérdés

Mekkora legalább egy $\mathcal{H}$, k-uniform hipergráf árnyékhányadosa, $\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|}$, ha a hipergráf maximális fokszáma valamilyen f korlát alatt marad?

Az $f < k$ eset

Alacsony fokszámú hipergráfok árnyékhányadosa

Ha $1 \leq f < k$ és $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf f fokszámkorláttal, akkor

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq k - \frac{f-1}{2}.$$

Az $f < k$ eset

Alacsony fokszámú hipergráfok árnyékhányadosa

Ha $1 \leq f < k$ és $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf f fokszámkorláttal, akkor

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq k - \frac{f-1}{2}.$$

- Extremális hipergráf: $\mathcal{H} \subset \binom{[k+1]}{k}$, $|\mathcal{H}| = f$.

Az $f < k$ eset

Alacsony fokszámú hipergráfok árnyékhányadosa

Ha $1 \leq f < k$ és $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf f fokszámkorláttal, akkor

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq k - \frac{f-1}{2}.$$

- Extremális hipergráf: $\mathcal{H} \subset \binom{[k+1]}{k}$, $|\mathcal{H}| = f$.
- Bizonyításötlet: Az "összefüggő komponensek" kicsik a fokszámkorlát miatt.

Az $f \geq k$ eset

Teljes hipergráfok extremalitása

Legyenek $t \geq k \geq 3$ egész számok és legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf f fokszámkorláttal. Ha

$$f \leq \binom{t}{k-1} + \binom{t - \lceil \frac{(t+1)}{k-1} \rceil}{k-2} + \ldots + \binom{t - \lceil \frac{(k-2)(t+1)}{k-1} \rceil}{1},$$

akkor

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq \frac{k}{t-k+2}.$$

Az $f \geq k$ eset

Teljes hipergráfok extremalitása

Legyenek $t \geq k \geq 3$ egész számok és legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf f fokszámkorláttal. Ha

$$f \leq \binom{t}{k-1} + \binom{t - \lceil \frac{(t+1)}{k-1} \rceil}{k-2} + \ldots + \binom{t - \lceil \frac{(k-2)(t+1)}{k-1} \rceil}{1},$$

akkor

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq \frac{k}{t-k+2}.$$

- Extremális hipergráf: $\mathcal{H} = \binom{[t+1]}{k}$.

Az $f \geq k$ eset

Teljes hipergráfok extremalitása

Legyenek $t \geq k \geq 3$ egész számok és legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf f fokszámkorláttal. Ha

$$f \leq \binom{t}{k-1} + \binom{t - \lceil \frac{(t+1)}{k-1} \rceil}{k-2} + \ldots + \binom{t - \lceil \frac{(k-2)(t+1)}{k-1} \rceil}{1},$$

akkor

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq \frac{k}{t-k+2}.$$

- Extremális hipergráf: $\mathcal{H} = \binom{[t+1]}{k}$.
- Bizonyításötlet: egy pont által lefogott hiperélek rendszere mint korlátos elemszámú hipergráf vizsgálható.
  Visszavezetés az Árnyéktételre.

Az $f \geq k$ eset

Teljes hipergráfok extremalitása

Legyenek $t \geq k \geq 3$ egész számok és legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform hipergráf f fokszámkorláttal. Ha

$$f \leq \binom{t}{k-1} + \binom{t - \lceil \frac{(t+1)}{k-1} \rceil}{k-2} + \ldots + \binom{t - \lceil \frac{(k-2)(t+1)}{k-1} \rceil}{1},$$

akkor

$$\frac{|\sigma(\mathcal{H})|}{|\mathcal{H}|} \geq \frac{k}{t-k+2}.$$

- Extremális hipergráf: $\mathcal{H} = \binom{[t+1]}{k}$.
- Bizonyításötlet: egy pont által lefogott hiperélek rendszere mint korlátos elemszámú hipergráf vizsgálható. Visszavezetés az Árnyéktételre.
- akkor működik, ha van extremális hipergráf uniform fokszámeloszlással.

Fennmaradó kérdések

Fennmaradó kérdések

A kimaradt intervallumok

Mi történik azokon az intervallumokon, ahol $\binom{t}{k-1} + \binom{t - \lceil \frac{(t+1)}{k-1} \rceil}{k-2} + \ldots + \binom{t - \lceil \frac{(k-2)(t+1)}{k-1} \rceil}{1} < f < \binom{t+1}{k-1}$?

Fennmaradó kérdések

A kimaradt intervallumok

Mi történik azokon az intervallumokon, ahol $\binom{t}{k-1} + \binom{t-\lceil\frac{(t+1)}{k-1}\rceil}{k-2} + \ldots + \binom{t-\lceil\frac{(k-2)(t+1)}{k-1}\rceil}{1} < f < \binom{t+1}{k-1}$?

- Ha $f \geq \binom{t}{k-1} + \binom{t+1-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}$, akkor van jobb, mint $\binom{[t+1]}{k}$

Fennmaradó kérdések

A kimaradt intervallumok

Mi történik azokon az intervallumokon, ahol $\binom{t}{k-1} + \binom{t-\lceil\frac{(t+1)}{k-1}\rceil}{k-2} + \ldots + \binom{t-\lceil\frac{(k-2)(t+1)}{k-1}\rceil}{1} < f < \binom{t+1}{k-1}$?

- Ha $f \geq \binom{t}{k-1} + \binom{t+1-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}$, akkor van jobb, mint $\binom{[t+1]}{k}$
- Az intervallum végén érdemes $\binom{[t+2]}{k}$-ból kihagyni néhány élet

Fennmaradó kérdések

A kimaradt intervallumok

Mi történik azokon az intervallumokon, ahol
$\binom{t}{k-1} + \binom{t-\lceil\frac{(t+1)}{k-1}\rceil}{k-2} + \ldots + \binom{t-\lceil\frac{(k-2)(t+1)}{k-1}\rceil}{1} < f < \binom{t+1}{k-1}$?

- Ha $f \geq \binom{t}{k-1} + \binom{t+1-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}$, akkor van jobb, mint $\binom{[t+1]}{k}$
- Az intervallum végén érdemes $\binom{[t+2]}{k}$-ból kihagyni néhány élet

Az árnyék mérete

Mit mondhatunk $|\sigma(\mathcal{H})|$-ról $|\mathcal{H}|$ függvényében?
(Ha adott k és f)

Fennmaradó kérdések

A kimaradt intervallumok

Mi történik azokon az intervallumokon, ahol
$\binom{t}{k-1} + \binom{t-\lceil\frac{(t+1)}{k-1}\rceil}{k-2} + \ldots + \binom{t-\lceil\frac{(k-2)(t+1)}{k-1}\rceil}{1} < f < \binom{t+1}{k-1}$?

- Ha $f \geq \binom{t}{k-1} + \binom{t+1-\lceil\frac{t+2}{k}\rceil}{k-2}$, akkor van jobb, mint $\binom{[t+1]}{k}$
- Az intervallum végén érdemes $\binom{[t+2]}{k}$-ból kihagyni néhány élet

Az árnyék mérete

Mit mondhatunk $|\sigma(\mathcal{H})|$-ról $|\mathcal{H}|$ függvényében?
(Ha adott k és f)

- $f < k$ esetén ha $|\mathcal{H}| = qf + r$, akkor q darab $k+1$ csúcson f hiperélet tartalmazó hipergráf diszjunkt úniója és még egy $k+1$ csúcson r hiperélet tartalmazó hipergráf.

Fennmaradó kérdések

A kimaradt intervallumok

Mi történik azokon az intervallumokon, ahol
$\binom{t}{k-1} + \binom{t - \lceil \frac{(t+1)}{k-1} \rceil}{k-2} + \ldots + \binom{t - \lceil \frac{(k-2)(t+1)}{k-1} \rceil}{1} < f < \binom{t+1}{k-1}$?

- Ha $f \geq \binom{t}{k-1} + \binom{t+1-\lceil \frac{t+2}{k} \rceil}{k-2}$, akkor van jobb, mint $\binom{[t+1]}{k}$
- Az intervallum végén érdemes $\binom{[t+2]}{k}$-ból kihagyni néhány élet

Az árnyék mérete

Mit mondhatunk $|\sigma(\mathcal{H})|$-ról $|\mathcal{H}|$ függvényében?
(Ha adott k és f)

- $f < k$ esetén ha $|\mathcal{H}| = qf + r$, akkor q darab $k+1$ csúcson f hiperélet tartalmazó hipergráf diszjunkt úniója és még egy $k+1$ csúcson r hiperélet tartalmazó hipergráf.

Köszönöm a figyelmet!