Egyéni kutatómunka II. beszámoló

Gehér Boglárka

1. Szubdirekt-szorzat

1.1. Definíció. Egy A algebra az $(A_i)_{i\in I}$ algebracsalád szubdirekt szorzata, ha $A \leq \prod A_i$ és minden $i \in I$ indexre $\pi_i(A) = A_i$, ahol π_i az i-ik vetítés.

1.2. Definíció. Egy A algebra szubdirekt irreducibilis, ha A minden α szubdirekt beágyazására van olyan i index, hogy $\pi_i \circ \alpha$ izomorfizmus.

Ha $(\theta_i)_{i\in I}$ az A algebra olyan kongruenciái, hogy $\cap\theta_i = \Delta$ (ahol Δ a diagonális reláció), akkor $\nu : A \to \prod A/\theta_i$, $\nu(a)(i) = a/\theta_i$ egy szubdirekt beágyazás. Ha $\theta_i \neq \Delta$ egyik i-re sem, akkor egyik $\pi_i\nu$ sem izomorfizmus, vagyis ez A egy valódi szubdirekt felbontását adja. Ilyen θ_i-ket pontosan akkor lehet találni ha $Con(A) \smallsetminus \{\Delta\}$-nak nincsen minimális eleme, és ekkor A nem szubdirekt irreducibilis. Ez másképp nem fordulhat elő:

1.3. Tétel. Az A algebra pontosan akkor szubdirekt irreducibilis, ha $Con(A) \smallsetminus \{\Delta\}$-nak van minimális eleme, vagyis, ha $\bigcap Con(A) \smallsetminus \{\Delta\} \neq \Delta$.

Ebből következik, hogy ha A nem direktfelbonthatatlan, akkor egy nemtriviális direktfelbontáshoz tartozó $\theta, \theta^* \neq \Delta$ faktorkongruenciák metszete Δ tehát A nem szubdirekt-irreducibilis. Általában nem igaz, hogy minden algebra előállna direktfelbonthatatlan algebrák direktszorzataként, például a direktfelbonthatatlan vektorterek az egydimenziós vektorterek, de véges test feletti egydimenziós vektorterek direktszorzatának számossága vagy véges vagy nem megszámlálható, tehát egy megszámlálható dimenziós vektortér nem állhat elő ilyen alakban. Teljesül viszont a következő:

1.4. Tétel. (Birkhoff) Minden algebra felbontható szubdirekt-irreducibilis algebrák szubdirekt-szorzatára

1.5. Definíció. Ha K $\mathcal{F}$ típusú algebrák egy osztálya akkor a $I(K)$ jelöli azon algebrák osztályát amik K valamelyik elemével izomorfak,$H(K)$ K elemeinek homomorf képei, $S(K)$ K elemeinek részalgebrái, $P(K)$ a K elemeiből alkotott direktszorzatok, $P_S(K)$ a K elemeinek szubdirekt-szorzatai.

1.6. Definíció. Egy V algebraosztály varietás, ha zárt a részalgebrákra, homomorf képekre és direktszorzatokra. Az összes $\mathcal{F}$-típusú algebrák osztályára ez teljesül, tehát minden K algebraosztályhoz létezik legkisebb varietás, ami őt tartalmazza, ezt $V(K)$ jelöli.

1.7. Tétel. (Tarski)V=HSP

2. Term algebrák, szabad algebrák

2.1. Definíció. Legyen $\mathcal{F}$ algebrák egy típusa, X változók egy halmaza, az $\mathcal{F}$-típusú X feletti termek $T(X)$ halmazát rekurzíve definiáljuk:

1. $X \cup \mathcal{F}_0 \subset T(X)$
2. minden $f \in \mathcal{F}_n$, $p_1, ..., p_n \in T(X)$-re $f(p_1, ..., p_n) \in T(X)$

Ha egy p termben az $x_0, ..., x_{n-1}$ változók fordulnak elő, akkor minden A $\mathcal{F}$-típusú algebrán meghatároz egy $p : A^n \to A$ függvényt, az $a_0, ..., a_{n-1}$ értékek behelyettesítését szintén rekurzíve lehet definiálni. Az ilyen term-függvények a műveletekhez hasonlóan megtartják a kongruenciákat, és a homomorfizmusok megtartják a term-függvényeket. Ha X végtelen, akkor teljesül, hogy a $B \subset A$ által generált részalgebra

$$Sg(B) = \{p^A(a_0, ..., a_{n-1}) \quad | \quad p \in T(X), a_0, ...a_{n-1} \in A\}.$$

$T(X)$-en megadható egy $\mathcal{F}$-típusú $\mathbf{T}(X)$ algebra, ahol a műveleteket az

$$f^{\mathbf{T(X)}}(p_0, ..., p_{n-1}) = f(p_0, ..., p_{n-1})$$

képlettel értelmezzük. Ha $\mathcal{F}_0$ és X közül legalább az egyik nem üres (tehát ha $T(X)$ nem üres) akkor $T(X)$ az $\mathcal{F}$-típusú algebrák osztályában rendelkezik az univerzális tulajdonsággal, vagyis minden A $\mathcal{F}$-típusú algebrára és $\alpha : X \to A$ leképezésre igaz, hogy kiterjed egy $\beta : \mathbf{T}(X) \to A$ homomorfizmussá.
Ha K $\mathcal{F}$-típusú algebrák egy osztálya akkor az $\mathbf{F}_K(X)$ szabadalgebrát a termalgebra egy $\mathbf{T}(X)/\theta$ faktoraként definiáljuk, ahol θ az olyan ϕ kongruenciák

metszete amire $\mathbf{T}(X)/\theta \in IS(K)$. Ez az algebra K felett rendelkezik az univerzális tulajdonsággal.

Egy $A \in K$ algebra esetén elég nagy X halmazra A $\mathbf{F}_K(X)$ homomorf képe, mert X ráképezhető A-ra és ez a ráképezés kiterjed egy homomorfizmussá. Mivel vannak ϕ_i kongruenciák, amire, $T(X)/\phi_i \in IS(K)$, $\cap\phi_i = \theta$, ezért $\mathbf{F}_K(X) \in IP_sIS(K) \leq ISP(K)$, tehát ha K varietás, akkor létezik K-ban olyan algebra, ami szabad K felett.

2.2. Definíció. $\mathcal{F}$-típusú azonosságnak nevezzük a $p \approx q$ alakú kifejezéseket, ahol $p, q \in T(X)$. Az A algebrában $p \approx q$ telejsül, ha $p^A = q^A$ mint függvények, ennek jele $A \models p \approx q$. Egy K algebraosztályra $K \models p \approx q$ ha minden $A \in K$ algebrára $A \models p \approx q$. A K algebraosztályban igaz azonosságok halmazát $Id_K(X)$ jelöli.

A $p \approx q$ azonosság pontosan akkor igaz K-ban, ha minden $A \in K$ algebrára és minden $\alpha : T(X) \to A$ homomorfizmusra $\alpha p = \alpha q$. I,S,H,P,V megtartják az azonosságokat.

2.3. Tétel. A $p, q \in T(X)$ termekre a K algebraosztályban pontosan akkor teljesül a $p \approx q$ azonosság ha $F_K(X)$-ben teljesül. Ha $|Y| > |X|$ akkor $F_K(Y) \models p \approx q \leftrightarrow F_K(X) \models p \approx q$.

2.4. Tétel. Ha X változók egy halmaza és Y változók egy végtelen halmaza, akkor $Id_K(X) = Id_{F_K(Y)}(X)$.

Azon algebrák osztályát amikben az azonosságok egy Σ halmazának minden eleme teljesül $M(\Sigma)$-val jelöljük. Azt mondjuk hogy egy K algebraosztály azonsságokkal axiomatizálható, ha létezik azonosságoknak olyan Σ halmaza, hogy $K = M(\Sigma)$. Az eddigiekből belátható a következő:

2.5. Tétel. Egy K algebraosztály pontosan akkor varietás, ha azonosságokkal axiomatizálható.
Bizonyítás. Tudjuk hogy $V(K) = HSP(K)$, és hogy H, S, P megtartják az azonosságokat, tehát ha $K \subset M(\Sigma)$ akkor $V(K) \subset M(\Sigma)$, tehát $M(\Sigma)$ varietás.
Fordítva belátjuk, hogy ha X változóknak egy végtelen halmaza, akkor $V(K) = M(Id_K(X)$. Az előbbiek szerint $V(K) \subset M(Id_K(Y)) = V'$. Bármilyen végtelen Y-ra $Id_{F_{V(K)}(Y)}(X) = Id_{V(K)}(X) = Id_{V'}(X) = Id_{F_{V'(Y)}(X)}$. Ebből következik, hogy $F_{V(K)}(Y) = F_{V'}(Y)$, de minden $A \in V'$ algebrához van elég nagy Y, hogy A $F_{V'}(Y) = F_{V(K)}(Y)$ homomorf képe, vagyis $A \in V(K)$, és $V' \subset V(K)$. $\square$

3. Szubdirekt-irreducibilis algebrák számosságai

3.1. Definíció. Egy $\pi(x,y,u,v)$ elsőrendű formulát kongruencia-formulának nevezünk ha

$$\exists \overrightarrow{w} \left\{ x \approx p_1(z_1, \overrightarrow{w}) \wedge \left[\bigwedge_{i=0}^{n} p_i(z_i', \overrightarrow{w}) \approx p_{i+1}(z_{i+1}, \overrightarrow{w}) \right] \wedge p_n(z_n', \overrightarrow{w}) \approx y \right\}$$

alakú, ahol $\{z_i, z_i'\} = \{u, v\}$

3.2. Tétel. Jelölje $x, y \in A$ elemekre $\theta(a,b)$ A legkisebb olyan kongruenciáját, aminek (a,b) eleme. Ekkor $c \neq d$ elemekre $(a,b) \in \theta(c,d)$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan π kongruenciaformula, hogy $A \models \pi(a,b,c,d)$.

3.3. Tétel. (kompaktsági tétel) Ha $\mathcal{L}$ egy elsőrendű nyelv és Σ $\mathcal{L}$ formuláinak egy halmaza, akkor Σ pontosan akkor kielégíthető, ha minden véges része kielégíthető.

3.4. Lemma. (Erdős) Ha $|A| > 2^\kappa$ és az $A \times A \setminus \Delta_A = G(A)$ teljes gráf éleit legfeljebb κ színnel színezzük, akkor lesz végtelen egyszínű klikk.

3.5. Tétel. (Taylor) Ha κ egy végtelen számosság, és $\mathcal{F}$ algebrák egy típusa, amire $|\mathcal{F}| \leq \kappa$. Ekkor ha a V varietásban van olyan A szubdirekt-irreducibilis algebra, aminek a számossága nagyobb mint 2^κ, akkor V-ben van akármilyen nagy számosságú szubdirekt-irreducibilis algebra is.

Bizonyítás. Mivel A szubdirekt irreducibilis, ezért $Con(A) \setminus \{\Delta\}$-nak van minimális eleme, és vannak $a, b \in A$ elemek, hogy $\cap(Con(A) \setminus \{\Delta\}) = \theta(a,b)$. Ekkor $\theta(a,b)$ minimalitása miatt, minden $c \neq d$-re van olyan π kongruencia-formula, hogy $A \models \pi(a,b,c,d)$. Vegyük az $\mathcal{F}$-típusú kongruencia-formuláknak egy olyan jólrendezését, hogy ennek a típusa $\lambda \leq \kappa$ és színezzük a (c,d) élt a legkisebb olyan $\alpha \in \lambda$ indexszel, hogy $A \models \pi_\alpha(a,b,c,d)$. Ekkor a lemma miatt létezik olyan α index, és $B \subset A$ végtelen halmaz, hogy minden $c, d \in B$ elemre $A \models \pi_\alpha(a,b,c,d)$.

Legyen $m > 2^\kappa$ számosság és I egy m elemű halmaz. Egészítsük ki az $\mathcal{F}$ típust az a,b és minden $i \in I$-re az i nulláris függvényszimbólummal, legyen ez az új típus $\mathcal{F}'$. Tekintsük a következő formulahalmazt:

$$\Sigma = \{i \not\approx j\}_{i \neq j} \cup Id_V(X) \cup \{\pi_\alpha(a,b,i,j)\}_{i \neq j} \cup \{a \not\approx b\}.$$

Ennek a formulahalmaznak rögzített Σ_0 véges részét kielégíti az A algebra egy $\mathcal{F}'$-típusú bővítése, amiben a realizációja a, b realizációja b és minden $i \in I$ ami előfordul Σ_0-ban realizációja egy $b_i \in B$ elem, $b_i \neq b_j$ ha $i \neq j$. Tehát a kompaktsági tétel szerint van olyan A^* $\mathcal{F}'$-típusú algebra, ami kielégíti Σ-t.

Legyen θ A^* maximális olyan kongruenciája, hogy $(a,b) \notin \theta$. Ekkor A^*/θ szubdirekt-irreducibilis, mert $\theta(a,b)$ minimális kongruenciája, $A^* \models Id_V(X)$ miatt $A^*/\theta \models Id_V(X)$ és ezért benne van V-ben. Ha $i \neq j$, akkor $A^* \models \pi_\alpha(a,b,i,j)$ $\{i \not\approx j\}_{i \neq j}$ miatt pedig $(i,j) \notin \theta$, tehát $|A^*/\theta| > |I| = m$. $\square$