Szubdirekt-irreducibilis algebrák számosságai

Gehér Boglárka
Témavezető: Sági Gábor

2020

Jelölések

- $\mathcal{F}$ algebrák egy típusa, $\mathcal{F} = \dot{\bigcup}_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_n$ elemei az n-változós függvényszimbólumok halmaza.
- $\langle A, F \rangle$ $\mathcal{F}$-típusú algebra, ha A nemüres halmaz, F elemei $\mathcal{F}$-fel vannak indexelve, és minden $f \in \mathcal{F}_n$ függvényszimbólum f^A realizációja n-változós művelet A-n.

Jelölések

- $\mathrm{Con}\, A$ jelöli az A algebra kongruenciahálóját, Δ_A a diagonális relációt, ∇_A a teljes relációt és $\theta(a, b)$ az (a, b) pár által generált kongruenciát.
- Ha K $\mathcal{F}$-típusú algebrák egy osztálya, akkor
  $I(K)$ a K valamelyik elemével izomorf algebrák osztálya,
  $H(K)$ K elemeinek homomorf képei,
  $S(K)$ K elemeinek részalgebrái és
  $P(K)$ a K elemeiből alkotott direktszorzatok osztálya.

Szubdirekt-szorzat

Definíció

Legyen $\mathcal{F}$ algebrák egy típusa, $(A_i)_{i\in I}$, A $\mathcal{F}$-típusú algebrák. Azt mondjuk, hogy A az A_i algebrák szubdirekt-szorzata, ha

$$A \leq \prod_{i\in I} A_i$$

és minden i-re π_i vetítés $\pi_i|_A$ megszorítása szürjektív A_i-re.

Szubdirekt-szorzat

Definíció

Az A algebra szubdirekt irreducibilis, ha bármelyik $A \leq \prod_{i \in I} A_i$ szubdirekt felbontására létezik i index, hogy $\pi_i|_A$ izomorfizmus.

Tétel

Az A algebra pontosan akkor szubdirekt-irreducibilis, ha $\mathrm{Con}\, A \setminus \{\Delta\}$*-nak van legkisebb eleme, vagyis ha* $\bigcap(\mathrm{Con}\, A \setminus \{\Delta\}) \neq \Delta$

Tétel

Minden A algebra előáll mint szubdirekt irreducibilis algebrák szubdirekt-szorzata.

Axiomatizálható struktúraosztályok

Definíció

Legyen $\mathcal{L}$ egy elsőrendű nyelv és $\Sigma \subset Form_{\mathcal{L}}$ elsőrendű formulák egy halmaza. Ekkor $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ *jelöli az olyan $\mathcal{L}$-struktúrák osztályát, amiben teljesül Σ.*

Definíció

Elsőrendű $\mathcal{L}$-struktúrák egy osztályát axiomatizálhatónak nevezzük, ha létezik elsőrendű formuláknak egy Σ halmaza, hogy $\mathrm{Mod}(\Sigma)$.

Axiomatizálható struktúraosztályok

Definíció

Legyen $\mathcal{F}$ algebrák egy típusa. Azonosságnak nevezzük a $p \approx q$ alakú formulákat, ahol p és q elsőrendű kifejezések.

Definíció

A K algebraosztályban teljesülő azonosságok halmazát Id_K jelöli.

Varietások

Definíció

Egy K algebraosztály varietás, ha zárt részalgebrákra, homomorf képre és direkszorzatra. Az összes $\mathcal{F}$-típusú algebrák osztálya varietás, ezért minden K algabraosztályhoz létezik legszűkebb őt tartalmazó varietás, ennek jele $V(K)$.

Tétel (Tarski)

V=HSP

Tétel (Birkhoff)

Egy K algebraosztály pontosan akkor varietás, ha axiomatizálható azonosságokkal. Minden K algebraosztályra teljesül $V(K) = Mod(Id_K)$.

Kongruencia-formulák

Definíció

Egy $\pi(x, y, u, v)$ elsőrendű formulát kongruencia-formulának nevezünk ha

$$\exists \overrightarrow{w} \left[x \approx p_1(z_1, \overrightarrow{w}) \wedge \left[\bigwedge_{i=0}^{n} p_i(z_i', \overrightarrow{w}) \approx p_{i+1}(z_{i+1}, \overrightarrow{w}) \right] \wedge p_n(z_n', \overrightarrow{w}) \approx y \right]$$

Tétel

Legyen A algebra és $a, b, c, d \in A$ páronként különböző elemek. Pontosan akkor teljesül, hogy $\theta(a, b) \subset \theta(c, d)$, ha van olyan π kongruenciaformula, hogy $A \models \pi(a, b, c, d)$.

A Taylor-tétel bizonyításában fel fogom használni a következő végtelen kombinatorikai tételt:

Tétel (Erdős)

Legyen κ végtelen számosság. Ha a 2^κ csúcsú teljes gráf éleit legfeljebb κ színnel színezzük, akkor lesz végtelen egyszínű klikk.

Szubdirekt-irreducibilis algebrák számosságai

Tétel (Taylor)

Legyen $\mathcal{F}$ algebrák egy típusa, V $\mathcal{F}$-típusú algebrák egy varietása. Ha κ olyan végtelen számosság, hogy $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ és V-ben van egy A szubdirekt irreducibilis algebra, amire teljesül, hogy $|A| \geq 2^{\kappa}$, akkor V-ben van bármilyen nagy szubdirekt-irreducibilis algebra is.

Taylor-tétel

Tétel (Taylor)

Legyen $\mathcal{F}$ algebrák egy típusa, V $\mathcal{F}$-típusú algebrák egy varietása. Ha κ olyan végtelen számosság, hogy $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ és V-ben van egy A szubdirekt irreducibilis algebra, amire teljesül, hogy $|A| \geq 2^\kappa$, akkor V-ben van bármilyen nagy szubdirekt-irreducibilis algebra is.

Bizonyítás: Legyen $A \in V$ szubdirekt-irreducibilis algebra aminek számossága nagyobb, mint 2^κ. Legyenek $a, b \in A$ olyanok, hogy $\theta(a, b)$ legkisebb kongruencia $\mathrm{Con}\, A \setminus \{\Delta\}$-ban. Vegyük az $\mathcal{F}$-típusú kongruenciaformulák egy $\lambda \leq \kappa$ rendtípusú $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \lambda}$ felsorolását.

A Taylor-tétel bizonyítása

Minden $c, d \in A$, $c \neq d$ párt színezzük a legkisebb olyan $\alpha \in \lambda$ indexszel, amire teljesül, hogy $A \models \pi_\alpha(a, b, c, d)$. Erdős tétele szerint létezik egy $B \subset A$ végtelen halmaz és egy α index, hogy minden $c, d \in B$, $c \neq d$ párra $A \models \pi_\alpha(a, b, c, d)$.
Legyen $m > 2^\kappa$ számosság és I egy m elemű halmaz.
Egészítsük ki az $\mathcal{F}$ típust az a,b és minden $i \in I$-re az i konstanszimbólummal, legyen ez az új típus $\mathcal{F}'$.
Tekintsük a következő formulahalmazt:

$$\Sigma = \{i \not\approx j\}_{i \neq j} \cup Id_V(X) \cup \{\pi_\alpha(a, b, i, j)\}_{i \neq j} \cup \{a \not\approx b\}.$$

A Taylor-tétel bizonyítása

Tekintsük a következő formulahalmazt:

$$\Sigma = \{i \not\approx j\}_{i \neq j} \cup Id_V(X) \cup \{\pi_\alpha(a, b, i, j)\}_{i \neq j} \cup \{a \not\approx b\}.$$

Ennek a formulahalmaznak rögzített Σ_0 véges részét kielégíti az A algebra egy $\mathcal{F}'$-típusú bővítése, amiben a realizációja a, b realizációja b és minden $i \in I$, ami előfordul Σ_0-ban, realizációja egy $b_i \in B$ elem, $b_i \neq b_j$ ha $i \neq j$.
Tehát a kompaktsági tétel szerint van olyan A^* $\mathcal{F}'$-típusú algebra, ami kielégíti Σ-t.

A Taylor-tétel bizonyítása

Legyen θ A^* maximális olyan kongruenciája, hogy $(a, b) \notin \theta$.
Ekkor A^*/θ szubdirekt-irreducibilis, mert $\theta(a, b)$ minimális kongruenciája,
$A^* \models Id_V(X)$, így a Birkhoff-tétel miatt benne van V-ben.
$A^* \models \{i \not\approx j\}_{i \neq j}$ miatt $i^{A^*} \neq j^{A^*}$ ha $i \neq j$, és
$A^* \models \pi_\alpha(a, b, i, j)$ miatt, $(i, j) \notin \theta$.
Tehát $|A^*/\theta| > |I| = m$.