Kváziöröklődő algebrák

Schefler Barna

2020. december 8.

A kváziöröklődő algebra (lásd a 4. definíciót) egy viszonylag új fogalom a gyűrűelméleten belül, az 1980-as évek végén vezette be E. Cline, B. Parshall és L. Scott. Kváziöröklődőnek fogunk nevezni egy olyan A algebrát, amelyben rekurzívan konstruálhatunk egy olyan A-ba felérő ideálláncot, melynek elemei adott tulajdonsággal rendelkező idempotens ideálok. Az ideállánc hosszából egy felső korlátot kapunk az algebra globális dimenziójára is (12. állítás).
A kváziöröklődő algebrák fontosságát mutatja Iyama egyik eredménye is. Cikkében megmutatta, hogy ha veszünk egy Λ artin algebrát, és egy X végesen generált Λ-modulust, akkor ehhez találhatunk egy Y Λ-modulust, hogy $\Gamma = End(X \oplus Y)$ kváziöröklődő lesz (13. tétel). Ebben az esetben Γ globális dimenziójára is kapunk egy felső becslést, mely jobb, mint a tetszőleges kváziöröklődő algebrára vonatkozó becslés. Azt tűzzük ki célul, hogy megértsük, hogy milyen plusz tulajdonsággal rendelkezik Iyama konstrukciója, miért lesz ebben az esetben kisebb a felső korlát mint az általános esetben?

A mostani beszámolóban a kváziöröklődő algebrákat, és néhány ezzel kapcsolatos konstrukciót tanulmányozunk. A könnyebb érthetőség érdekében a definíciókat és tételeket példákon keresztül próbáljuk megérteni.

1. Definíció. *Egy A egységelemes gyűrűt szemiprimérnek nevezünk, ha a $J = J(A)$ Jacobson radikálja nilpotens, és A/J féligegyszerű artin gyűrű.*

2. Definíció. *Legyen J az A Jacobson radikálja. A-nak egy I ideálja örökletes, ha:*

1. $I^2 = I$
2. $IJI = 0$
3. I_A *projektív, mint jobb A-modulus*

Az idempotens ideálok megértésében segít a következő lemma:

3. Lemma. *Ha $e \in A$ egy idempotens elem, akkor $(AeA)^2 = (AeA)$. Megfordítva, ha A szemiprimér gyűrű, és $I^2 = I$ teljesül az I ideálra, akkor létezik egy e idempotens elem úgy, hogy $I = AeA$.*

4. Definíció. *Egy A szemiprimér gyűrűt kváziöröklődőnek nevezünk, ha létezik egy olyan $0 = I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_n = A$ örökletesnek nevezett ideállánc, melyre: I_t/I_{t-1} az A/I_{t-1} örökletes ideálja, minden $1 \leq t \leq n$-re.*

A fenti tulajdonságoknak szemléletes jelentésük van a gráfalgebrák körében, így innen vett példák segítségével próbáljuk megérteni. Szükségünk lesz tehát a gráfalgebrák néhány tulajdonságára. Először is vezzessük be a gráfalgebrák fogalmát:

5. Definíció. *Legyen K egy test, Γ pedig irányított gráf. $K\Gamma$ útalgebra bázisa az irányított utak halmaza, melybe belevesszük a 0 hosszúságú utakat is. Az algebra additív struktúráját az báziselemek K feletti lineáris kombinációja adja. A multiplikatív struktúrát a báziselemeken adjuk meg először, majd azt disztributívan kifejtjük az összes elemre. Legyen tehát két irányított út, p_1 és p_2. Ha p_1 végpontja és p_2 kezdőpontja megegyezik, akkor p_1 és p_2 szorzata a két út konkatenációja, melyet p_1p_2-vel jelölünk. Ha p_1 végpontja és p_2 kezdőpontja nem egyezik meg, akkor p_1p_2-t 0-nak definiáljuk.*

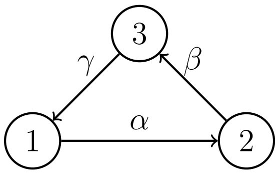
Vegyük észre, hogy az útalgebra lehet végtelen dimenziós is, például ha tartalmaz irányított kört, vagy ha végtelen sok csúcsot, esetleg élt tartalmaz. Ezért van szükség az alábbi definícióra:

6. Definíció. *Legyen adott egy véges Γ gráfhoz tartozó $K\Gamma$ útalgebra. Ennek egy I ideáljára azt modjuk, hogy megengedett, ha létezik $m \geq 2$, hogy $J^m \subseteq I \subseteq J^2$ (J az útalgebra Jacobson radikálja). Egy megengedett ideál szerinti faktort $A = K\Gamma/I$ gráfalgebrának nevezzük.*

7. Megjegyzés. *Emlékeztető*

- *A fenti módon definiált gráfalgebrák végesdimenziósak lesznek.*
- *Egy gráfalgebra Jacobson radikálja megegyezik a nemnulla hosszúságú utak által generált ideállal.*
- *Az előzőből az is következik, hogy, hogy e_nJe_n ideált az olyan nem nulla hosszúságú utak generálják, amelyek az n-ik csúcsból indulnak és ott is végződnek.*

- *Az Ae_nA alakú ideált megkaphatjuk, mint a e_nAe_n vektortér által generált ideált.*



1. ábra.

Legyen Γ az 1 ábrán látható gráf, és vegyük ennek a $\alpha\beta\gamma\alpha$; $\gamma\alpha\beta$ elemek által generált ideál szerint faktorát, ezt fogjuk A-nak nevezni. e_1-gyel jelöljük az 1-es csúcshoz tartozó idempotenst, azaz 1-ből induló 1-be érkező 0 hosszú utat. Az e_1 által generált e_1A ideál az 1 csúcsból kiinduló utak lineáris kombinációiból áll. Ennek a szerkezetét az $e_1A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\end{smallmatrix}$ diagram írja le, ahol a számok a báziselemeknek felelnek meg: $1 \to e_1$; $2 \to \alpha$; $3 \to \alpha\beta$; $1 \to \alpha\beta\gamma$.

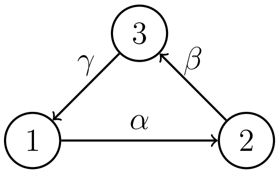
Hasonlóan kapjuk, hogy: $A_A = e_1A \oplus e_2A \oplus e_3A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$

A 3. lemma és a 2. definíció első része miatt az örökletes ideálokat Ae_iA; $i = 1, 2, 3$ alakban keressük.

A 7. megjegyzés alapján az Ae_nA alakú ideált a következőképpen kaphatjuk meg: A_A direktfelbontásában megkeressük az összes legfelső n-t, és az ezek fölött szereplő részt levágjuk, csak az alsó rész marad meg. Így Ae_3A : $\begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$

$\begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ projektív, hiszen az A_A szabad modulus direktösszeadandója, azonban Ae_3A nem lesz az, hiszen az első összeadandója, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ nem projektív. Hasonlóan $Ae_1A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, valamint $Ae_2A = \begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus 2$ sem projektív. Így A_A nem lehet kváziöröklődő, mert nem találtunk egy örökletes ideált sem, amivel elkezdődhetne az ideállánc.

Megjegyezzük továbbá, hogy a 2 definíció második része (mely esetünkben azt jelentené, hogy $e_nJe_n = 0$) sem teljesül e_1-re valamint e_2-re, hiszen az $\begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\end{smallmatrix}$ és $\begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix}$ direktösszeadandók olyan utakat tartalmaznak mely ugyanott végződnek, ahol kezdődtek. Ez a tulajdonság ugyanakkor teljesül $\begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$-re ahol a kezdeti 3-as után már nem jelenik meg újra ugyanez a szám.



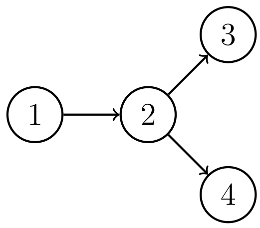
2. ábra.

Vegyük most ismét az előző gráfot, annyi különbséggel, hogy most csak az $\gamma\alpha\beta$ által generált ideállal faktorizálunk! Ebben az esetben annyi változik, hogy az első komponensben az $\alpha\beta\gamma$-val való szorzás után ismét szorozhatunk α-val (de utána már β-val 0-t kapunk: $\alpha\beta\gamma\alpha\beta = \alpha\beta 0 = 0$), azaz az első komponensben az alsó 1 alatt megjelenik egy 2-es. Tehát: $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$

Vegyük észre, hogy itt Ae_3A : $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix} \to \right) \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$

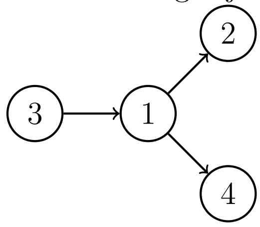
projektív, mivel $\begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ projektív. Sőt, az előző esethez hasonlóan $e_3Je_3 = 0$, így Ae_3A egy örökletes ideált határoz meg, és az e szerint vett faktor: $A/Ae_3A = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus 2$

A faktorban a 2-es által generált ideál, azaz $A(e_2+e_3)A/Ae_3A$: $(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus 2 \to)\ 2 \oplus 2$ projektív, és mindkét komponensben egyetlen 2-es szerepel, így megkaptuk a faktor egy örökletes ideálját. Egyszerű látni, hogy ha most ismét faktorizálunk, akkor a maradék, 1 is örökletes, vagyis a 3, 2, 1 sorrendet véve kapjuk, hogy ebben az esetben A_A kváziöröklődő.



3. ábra. A gráfja

Érdemes megjegyezni, hogy nem biztos, hogy minden sorrendre megkapjuk az örökletes ideálláncot, elég csak arra gondolni, ha 1, vagy 2-vel kezdtünk volna, akkor a 2 definíció második pontja biztosan nem teljesült volna.



4. ábra. B gráfja

Most pedig röviden bemutatunk egy olyan példát is (3. valamint 4. ábra), amelyben a csúcsok több különböző sorrendjére is örökletes láncot kapunk.

$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & 2 & \\ 3 & & 4\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 3 & & 4\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus 4$; $B_B = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4\end{smallmatrix} \oplus 2 \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ & 1 & \\ 2 & & 4\end{smallmatrix} \oplus 4$

Mindkét esetben a $4, 3, 2, 1$ sorrendet használjuk, azonban ez ugyanannak a gráfnak a különböző sorszámozása. Az örökletes ideálok sorrendje szín szerint: piros, kék, zöld, narancssárga.

8. Definíció. *Legyen $f : A \to B$; $g : A \to C$ két leképezés. Ekkor azt mondjuk, hogy f keresztülvezethető C-n (vagy g-n), ha létezik egy $h : C \to B$ leképezés, hogy $f = h \circ g$*

9. Tétel. ***(Auslander)*** *Ha A véges dimenziós algebra, akkor létezik egy véges dimenziós B algebra úgy, hogy teljesülnek a következők:*

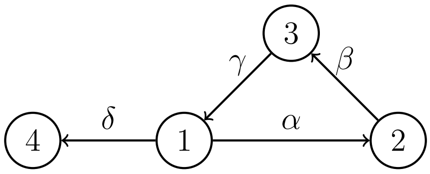
1. *gl dim $B < \infty$*
2. *létezik $e^2 = e \in B$ úgy, hogy $A \cong eBe$*

Az ilyen algebrát (ebben a dolgozatban Auslander, Dlab és Ringel nyomán) ADR-nek fogom nevezni.

B konstrukciója a következő: J az A Jacobson radikálja, és teljesül rá, hogy $J^n = 0$. Legyen $M := (A/J)_A \oplus (A/J^2)_A \oplus \ldots \oplus (A/J^n)_A$. Ekkor $B := End(M_A)$ a keresett algebra.

10. Tétel. ***(Dlab-Ringel)*** *Az ADR algebra kváziöröklődő.*

A korábbiakhoz hasonlóan ismét egy példán szemléltetjük a fenti 10. tételt. Vegyük tehát a 5. ábrán látható gráf faktorát a $\gamma\alpha = \gamma\delta$ által generált ideálnál. Az előzőekhez hasonlóan: $A_A = \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \\ 3&& \\ 1&& \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 4$



5. ábra.

Nézzük meg, hogy néz ki ebben az esetben M. Első lépésként egy egyszerűsítést vezetünk be: M direktösszeadandói közül kihagyjuk azokat, amelyek már szerepelnek a felsorolásban. Ezt megtehetjük, mert az így kapott M'-re $EndM'$ Morita ekvivalens lesz $EndM$-mel (az egyszerűsítő lépés nélkül kapott M endomorfizmusgyűrűje). A továbbiakban az egyszerűsített változatot jelöljük M-mel. A fenti módszerekkel kapjuk:

$$M = 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \\ 3&& \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \\ 3&& \\ 1&& \end{smallmatrix}$$

A következőkben B-t akarjuk meghatározni, ezt egy megfelelő gráf gráfalgebrájaként keressük. A fent felsorolt 10 direktösszeadandónak külön-külön pontokat feleltetünk meg, ezek lesznek a csúcsai az új gráfnak. A feladat az, hogy találjuk meg a csúcsok közti éleket, azaz a direkt komponensek közötti morfizmusokat. Ezeket az összeadandókat jelöljük az $a, b, \dots j$ betűkkel, a fenti sorrend szerint: $a = 1$; $b = 2$; $c = 3, \dots$

Nézzük most meg, hova mehetnek morfizmusok a-ból. Nyilvánvalóan csak olyan komponensbe, mely tartalmazza az 1-et. Vegyük észre, hogy a-ban $e_1\alpha = e_1\delta = 0$, így ez a képére is kell teljesüljön, vagyis nem létezhet morfizmus $a = 1$-ból $e = \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \end{smallmatrix}$; $h = \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \\ 3&& \end{smallmatrix}$; vagy $j = \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \\ 3&& \\ 1&& \end{smallmatrix}$-be. Van azonban $a = 1$-ből $g = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$; $i = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ és $j = \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \\ 3&& \\ 1&& \end{smallmatrix}$-be. Sőt, ha arra is figyelünk, hogy a megfelelő színek egymásba kerüljenek, észrevesszük, hogy az $a \to j$ morfizmus keresztülvezethető az $a \to i$-n, és mindkettő keresztülvezethető $a \to g$-n. Vagyis az endomorfizmusgyűrűben az a által generált ideál alakja: $Be_a = \begin{smallmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix}$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $Be_b = \begin{smallmatrix} b \\ e \end{smallmatrix}$; $Be_c = \begin{smallmatrix} c \\ f \\ h \end{smallmatrix}$ és $Be_d = \begin{smallmatrix} d \\ j \\ i \\ h \end{smallmatrix}$.

Be_e esetében e-n kívűl nem találunk olyan komponenst, amelyben $e = \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \end{smallmatrix}$ a komponens legalján lenne, viszont ha faktorizálunk (mely szintén morfizmus), akkor eljuthatunk $a = 1$-ba. Innen pedig a fenti módszerrel már ismerjük a morfizmusokat, vagyis kapjuk, hogy $Be_e = \begin{smallmatrix} e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix}$. Ugyanezzel a módszerrel adódik: $Be_h = \begin{smallmatrix} h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix}$, és $Be_j = \begin{smallmatrix} j \\ h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix}$.

Be_f esetében két irányba mehetünk: $f = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$-et faktorizálva $b = 2$-be jutunk, majd ezt beleképezzük $e = \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \end{smallmatrix}$-be. A másik lehetőség, hogy f-et $h = \begin{smallmatrix} &1& \\ 2&&4 \\ 3&& \end{smallmatrix}$-ba képezzük, majd ezt faktorizálva jutunk el e-be. $f \to e$ keresztülvezethető $f \to b$ és $f \to h$-n is, ezek között azonban nincs kapcsolat, így kapjuk, hogy $Be_f = \begin{smallmatrix} & f & \\ b & & h \\ & e & \end{smallmatrix}$

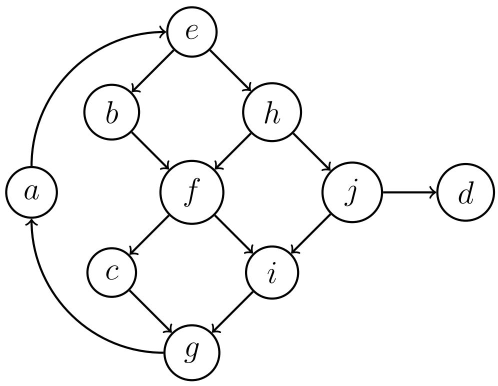
Be_g esetében szintén két irányba elindulhatunk: $g = \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ az $i = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$ valamint $j = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix}$-ben is alul helyezkedik el, így $g \to j$ keresztülvezethető $g \to i$-n. Ha pedig előbb faktorizálunk, akkor $c = 3$-ba, majd innen $f = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$-be jutunk. Az is észrevehető, hogy mindkettőből eljuthatunk $h = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \end{smallmatrix}$-be. Mivel $g \to h$ keresztülvezethető az előzőeken, kapjuk, hogy $Be_g = \begin{smallmatrix} & g & \\ c & & i \\ f & & j \\ & h & \end{smallmatrix}$. Vegyük észre továbbá, hogy a két irány között nincs más kapcsolat.

Végül, ugyanezzel a módszerrel jön ki, hogy $Be_i = \begin{smallmatrix} & & i & \\ & f & & j \\ b & & h & \\ & e & & \end{smallmatrix}$ (azaz $i \to h$ keresztülvezethető $i \to f$ és $i \to j$-n is; és ugyanígy $i \to e$ keresztülvezethető $i \to b$, valamint $i \to h$-n).

Mindent összevetve, kapjuk tehát, hogy:

$$_BB = \begin{smallmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} b \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ f \\ h \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ j \\ h \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & f & \\ b & & h \\ & e & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & g & \\ c & & i \\ f & & j \\ & h & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & & i & \\ & f & & j \\ b & & h & \\ & e & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} j \\ h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix}$$

Megjegyezzük, hogy $_BB$ balmodulus, így ebben az esetben a nyilak fordított irányban haladnak (6 ábra).



6. ábra. B gráfja

Hátravan még, hogy belássuk, hogy ez szintén kvázi-öröklődő. Az ideálok megfelelő sorrendje Be_a, majd Be_b a megfelelő faktorban, és így tovább Be_j-ig:

$$_BB = \begin{smallmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} b \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ f \\ h \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ j \\ h \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & f & \\ b & & h \\ & e & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & g & \\ c & & i \\ f & & j \\ & h & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & & i & \\ & f & & j \\ b & & h & \\ & e & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} j \\ h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix}$$

$B'e_a$, $B'e_b$, $B'e_c$, $B'e_d$, $B'e_e$, $B'e_f$, $B'e_g$, $B'e_h$, $B'e_i$, $B'e_j$

Az örökletes ideálra a jelöltet ismét $Be_\alpha B$ alakban keressük. A színezésből is látszik, hogy a megfelelő ideálok projektívek lesznek (Pl $Be_aB = \begin{smallmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix}$; $B(e_a + e_b)B/Be_aB = \begin{smallmatrix} b \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} b \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} b \\ e \end{smallmatrix}$, és így tovább).

Ellenőrizni kell még, hogy teljesül-e a megfelelő ideálokra az $IJI = 0$ tulajdonság. Ehhez szükségünk lesz az alábbiakra:

11. Megjegyzés. *Emlékeztető*

- *Ha $J(R)$ az R gyűrű Jacobson radikálja, és e idempotens, akkor $eJ(R)e = J(eRe)$*
- $End(eR) = eRe$

Vagyis elég $e_\alpha J(B)e_\alpha = J(e_\alpha Be_\alpha) = J(End(e_\alpha B))$ kiszámolása.
Vegyük elsőre $End\begin{pmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{pmatrix}$-t ugyanis Be_a-val szeretnénk kezdeni az örökletes láncot. Ehhez fixálnunk kell egy $\Lambda : a \to a;\ x \in a \mapsto \lambda x$ leképezést, ahol $\lambda \in K$. Vegyük észre, hogy λ az egész $\begin{pmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{pmatrix}$ leképezést meghatározza, hiszen ekkor g; i; és j-ben is az elemek a λ-szorosukba mennek. Így $End\begin{pmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{pmatrix} \cong K$, és $J(K) = 0$, mert K test, és épp ezt akartuk. Hasonlóan végigszámolva kapjuk, hogy a tulajdonság működik, vagyis valóban örökletes ideálokat, és így kváziöröklődő algebrát kapunk.
Megjegyezzük továbbá, hogy az ideálok sorrendje ebben az esetben számít, ugyanis megmutatjuk, hogy ha Be_jB-vel kezdenénk, akkor nem kapnánk örökletes ideálláncot. $End\begin{pmatrix} j \\ h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{pmatrix}$ esetében ugyanis több lehetőségünk van: a fenti $\Lambda : j \to j;\ x \in j \mapsto \lambda x;\ \lambda \in K$ ismént meghatározza az egész leképezést, most viszont további lehetőségünk is van, ha egy $\varphi : j \to j$ leképezést veszünk. Így erre nem teljesül az $IJI = 0$ tulajdonság.

12. Állítás. *Egy A szemiprimér kváziöröklődő gyűrűre, melynek az örökletes ideállánca $0 = I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_n = A$, teljesül: $gl\ dimA \leq 2n - 2$*

13. Tétel. ***(Iyama)*** *Legyen Λ egy artin algebra, X egy végesen generált Λ-modulus. Ekkor létezik egy Y Λ-modulus, hogy $\Gamma = End(X \oplus Y)$ kváziöröklődő, n hosszú örükletes lánccal. Erre a Γ-ra az is teljesül, hogy $gl\ dim\Gamma \leq n$.*

A globális dimenzióra vonatkozó becslést Ringel [3] cikke magyarázza. Ő a projektív modulusok egy speciális tulajdonságából vezeti le Iyama eredményét, s az ilyen kváziöröklődő algebrákat erősen kváziöröklődőnek nevezi. A továbbiakban azt szeretnénk vizsgálni, milyen $\oplus_I M_i$ esetén lesz $End(\oplus_I M_i)$ erősen kváziöröklődő.

Hivatkozások

[1] VLASTIMIL DLAB - CLAUS MICHAEL RINGEL, *Quasi-hereditary algebras*, Illinois journal of mathematics Volume 33, Number 2, Summer 1989

[2] VLASTIMIL DLAB - CLAUS MICHAEL RINGEL, *Every semiprimary ring is the endomorphism ring of a projective module over a quasi-hereditary ring*, Proceedings of the American Mathematical Society Volume 107. Number I. September 1989

[3] CLAUS MICHAEL RINGEL, *Iyama's finiteness theorem via strongly quasi-hereditary algebras.*, https://arxiv.org/abs/0912.5001v1 [math.RT] 26 Dec 2009