Kváziöröklődő algebrák

Schefler Barna

Áttekintés

A kváziöröklődő algebra fogalmát 1980-as évek végén vezette be E. Cline, B. Parshall és L. Scott.

Áttekintés

A kváziöröklődő algebra fogalmát 1980-as évek végén vezette be E. Cline, B. Parshall és L. Scott.

Definíció

Legyen J az A Jacobson radikálja. A-nak egy I ideálja örökletes, ha: $I^2 = I$; $IJI = 0$ és I_A projektív, mint jobb A-modulus.

Áttekintés

A kváziöröklődő algebra fogalmát 1980-as évek végén vezette be E. Cline, B. Parshall és L. Scott.

Definíció

Legyen J az A Jacobson radikálja. A-nak egy I ideálja örökletes, ha:
$I^2 = I$; $IJI = 0$ *és* I_A *projektív, mint jobb* A*-modulus.*

Definíció

Egy A szemiprimér gyűrűt kváziöröklődőnek nevezünk, ha létezik egy olyan $0 = I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_n = A$ *örökletesnek nevezett ideállánc, melyre:*
I_t/I_{t-1} *az* A/I_{t-1} *örökletes ideálja, minden* $1 \leq t \leq n$*-re.*

Áttekintés

A kváziöröklődő algebra fogalmát 1980-as évek végén vezette be E. Cline, B. Parshall és L. Scott.

Definíció

Legyen J az A Jacobson radikálja. A-nak egy I ideálja örökletes, ha: $I^2 = I$; $IJI = 0$ *és* I_A *projektív, mint jobb A-modulus.*

Definíció

Egy A szemiprimér gyűrűt kváziöröklődőnek nevezünk, ha létezik egy olyan $0 = I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_n = A$ *örökletesnek nevezett ideállánc, melyre:* I_t/I_{t-1} *az* A/I_{t-1} *örökletes ideálja, minden* $1 \leq t \leq n$*-re.*

Állítás

Egy A szemiprimér kváziöröklődő gyűrűre, melynek az örökletes ideállánca $0 = I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_n = A$*, teljesül:* $gl\ dim A \leq 2n - 2$

Áttekintés

A kváziöröklődő algebrák fontosságát mutatja Iyama eredménye is:

Tétel

(Iyama) *Legyen* Λ *egy végesdimenziós algebra,* X *egy végesen generált* Λ*-modulus. Ekkor létezik egy* Y Λ*-modulus, hogy* $\Gamma = End(X \oplus Y)$ *kváziöröklődő,* n *hosszú örükletes lánccal. Erre a* Γ*-ra az is teljesül, hogy gl dim*$\Gamma \leq n$*.*

Áttekintés

A kváziöröklődő algebrák fontosságát mutatja Iyama eredménye is:

Tétel

(Iyama) *Legyen* Λ *egy végesdimenziós algebra,* X *egy végesen generált* Λ*-modulus. Ekkor létezik egy* Y Λ*-modulus, hogy* $\Gamma = End(X \oplus Y)$ *kváziöröklődő,* n *hosszú örükletes lánccal. Erre a* Γ*-ra az is teljesül, hogy gl dim*$\Gamma \leq n$*.*

Láthatjuk, hogy ebben az esetben Γ globális dimenziójára egy jobb felső becslést kapunk, mint az általános esetben. Azt tűzzük ki célul, hogy megértsük, hogy milyen plusz tulajdonsággal rendelkezik Iyama konstrukciója, miért lesz ebben az esetben kisebb a felső korlát, mint az általános esetben?

Áttekintés

A kváziöröklődő algebrák fontosságát mutatja Iyama eredménye is:

Tétel

(Iyama) *Legyen Λ egy végesdimenziós algebra, X egy végesen generált Λ-modulus. Ekkor létezik egy Y Λ-modulus, hogy $\Gamma = End(X \oplus Y)$ kváziöröklődő, n hosszú örükletes lánccal. Erre a Γ-ra az is teljesül, hogy gl dim$\Gamma \leq n$.*

Láthatjuk, hogy ebben az esetben Γ globális dimenziójára egy jobb felső becslést kapunk, mint az általános esetben. Azt tűzzük ki célul, hogy megértsük, hogy milyen plusz tulajdonsággal rendelkezik Iyama konstrukciója, miért lesz ebben az esetben kisebb a felső korlát, mint az általános esetben?

Állítás

Egy A szemiprimér kváziöröklődő gyűrűre, melynek az örökletes ideállánca $0 = I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_n = A$, teljesül: gl dim$A \leq 2n - 2$

Áttekintés

A kváziöröklődő algebrák fontosságát mutatja Iyama eredménye is:

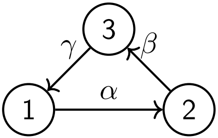
Tétel

(Iyama) *Legyen* Λ *egy végesdimenziós algebra,* X *egy végesen generált* Λ*-modulus. Ekkor létezik egy* Y Λ*-modulus, hogy* $\Gamma = End(X \oplus Y)$ *kváziöröklődő,* n *hosszú örükletes lánccal. Erre a* Γ*-ra az is teljesül, hogy gl dim*$\Gamma \leq n$*.*

Láthatjuk, hogy ebben az esetben Γ globális dimenziójára egy jobb felső becslést kapunk, mint az általános esetben. Azt tűzzük ki célul, hogy megértsük, hogy milyen plusz tulajdonsággal rendelkezik Iyama konstrukciója, miért lesz ebben az esetben kisebb a felső korlát, mint az általános esetben?

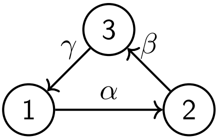
A mostani beszámolóban a kváziöröklődő algebrákat, és néhány ezzel kapcsolatos konstrukciót tanulmányozunk. Az előforduló definícióknak és tételeknek szemléletes jelentésük van a gráfalgebrák körében, így innen vett példák segítségével próbáljuk majd megérteni ezeket.

Példa nem kváziöröklődőre



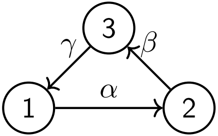
A az ábrán látható Γ gráf $\alpha\beta\gamma\alpha$; $\gamma\alpha\beta$ elemek által generált ideál szerint faktora. Ennek a szerkezetét az $A_A = e_1A \oplus e_2A \oplus e_3A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}$ diagram írja le.

Példa nem kváziöröklődőre



A az ábrán látható Γ gráf $\alpha\beta\gamma\alpha$; $\gamma\alpha\beta$ elemek által generált ideál szerint faktora. Ennek a szerkezetét az $A_A = e_1A \oplus e_2A \oplus e_3A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ diagram írja le.
Az örökletes ideálokat Ae_iA; alakban keressük.

Példa nem kváziöröklődőre

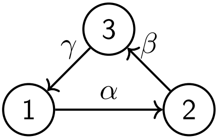


A az ábrán látható Γ gráf $\alpha\beta\gamma\alpha$; $\gamma\alpha\beta$ elemek által generált ideál szerint faktora. Ennek a szerkezetét az $A_A = e_1A \oplus e_2A \oplus e_3A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ diagram írja le. Az örökletes ideálokat Ae_iA; alakban keressük.

Emlékeztető

Ha $e \in A$ egy idempotens elem, akkor $(AeA)^2 = (AeA)$. Megfordítva, ha A szemiprimér gyűrű, és $I^2 = I$ teljesül az I ideálra, akkor létezik egy e idempotens elem úgy, hogy $I = AeA$.

Példa nem kváziöröklődőre



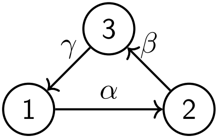
A az ábrán látható Γ gráf $\alpha\beta\gamma\alpha$; $\gamma\alpha\beta$ elemek által generált ideál szerint faktora. Ennek a szerkezetét az $A_A = e_1A \oplus e_2A \oplus e_3A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ diagram írja le. Az örökletes ideálokat Ae_iA; alakban keressük.

Így Ae_3A : $\begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ nem projektív, hiszen

$\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$ nem projektív. Hasonlóan $Ae_1A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$,

valamint $Ae_2A = \begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus 2$ sem projektív. Így A_A nem kváziöröklődő, az ideállánc el sem kezdődik.

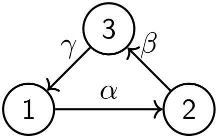
Példa kváziöröklődőre



Ha csak az $\gamma\alpha\beta$ által generált ideállal faktorizálunk:

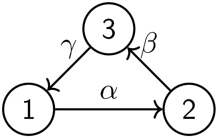
$$A_A = \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix};$$

Példa kváziöröklődőre



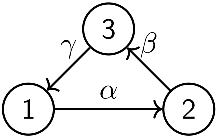
Ha csak az $\gamma\alpha\beta$ által generált ideállal faktorizálunk:
$A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$; és Ae_3A : $\begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ projektív,
mivel $\begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ projektív. Az előző esethez hasonlóan $e_3Je_3 = 0$, így Ae_3A egy örökletes ideált határoz meg, az e szerint vett faktor: $A/Ae_3A = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus 2$.

Példa kváziöröklődőre



Ha csak az $\gamma\alpha\beta$ által generált ideállal faktorizálunk:
$A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$; és Ae_3A : $\begin{smallmatrix}1\\2\\\color{red}3\\\color{red}1\\\color{red}2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\\color{red}3\\\color{red}1\\\color{red}2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}\color{red}3\\\color{red}1\\\color{red}2\end{smallmatrix}$ projektív,
mivel $\begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ projektív. Az előző esethez hasonlóan $e_3Je_3 = 0$, így Ae_3A egy örökletes ideált határoz meg, az e szerint vett faktor: $A/Ae_3A = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus 2$.
Hasonlóan kapjuk, hogy $A(e_2 + e_3)A/Ae_3A$:
$(\begin{smallmatrix}1\\\color{blue}2\end{smallmatrix} \oplus \color{blue}2 \color{black}\rightarrow)$ $\color{blue}2 \oplus 2$, valamint az e szerint vett faktor: $\color{green}1$ is örökletes, tehát a 3, 2, 1 sorrenddel A_A kváziöröklődő.

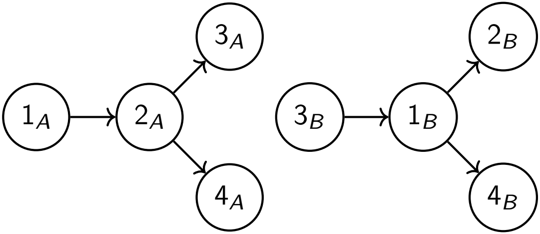
Példa kváziöröklődőre



Ha csak az $\gamma\alpha\beta$ által generált ideállal faktorizálunk:
$A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\3\\1\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$; és Ae_3A : $\begin{smallmatrix}1\\2\\{\color{red}3}\\{\color{red}1}\\{\color{red}2}\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\{\color{red}3}\\{\color{red}1}\\{\color{red}2}\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}{\color{red}3}\\{\color{red}1}\\{\color{red}2}\end{smallmatrix}$ projektív, mivel $\begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}$ projektív. Az előző esethez hasonlóan $e_3Je_3 = 0$, így Ae_3A egy örökletes ideált határoz meg, az e szerint vett faktor: $A/Ae_3A = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \oplus 2$.
Hasonlóan kapjuk, hogy $A(e_2+e_3)A/Ae_3A$:
$(\begin{smallmatrix}1\\{\color{blue}2}\end{smallmatrix} \oplus {\color{blue}2} \to)\ {\color{blue}2} \oplus {\color{blue}2}$, valamint az e szerint vett faktor: ${\color{green}1}$ is örökletes, tehát a 3, 2, 1 sorrenddel A_A kváziöröklődő.

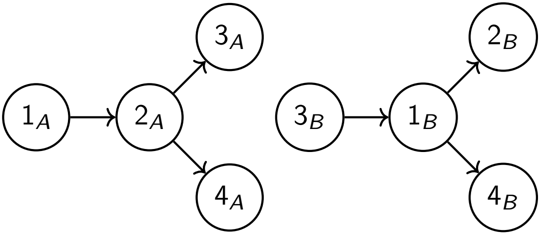
Érdemes megjegyezni, hogy nem biztos, hogy minden sorrendre megkapjuk az örökletes ideálláncot, elég csak arra gondolni, ha 1, vagy 2-vel kezdtünk volna, akkor a 1 definíció második pontja biztosan nem teljesült volna.

Példa a sorrend változtatására



Erre a gráfra a csúcsok különböző sorrendjére is örökletes láncot kapunk.

Példa a sorrend változtatására



Erre a gráfra a csúcsok különböző sorrendjére is örökletes láncot kapunk.

$A_A = {}_{3}\overset{1}{2}{}_{4} \oplus {}_{3}{}^{2}{}_{4} \oplus 3 \oplus 4$; $B_B = {}_{2}{}^{1}{}_{4} \oplus 2 \oplus {}_{2}\overset{3}{1}{}_{4} \oplus 4$

Mindkét esetben a $4, 3, 2, 1$ sorrendet használjuk, azonban ez ugyanannak a gráfnak a különböző sorszámozása. Az örökletes ideálok sorrendje szín szerint: piros, kék, zöld, narancssárga.

Auslander konstrukciója

Tétel

(Auslander) *Ha A véges dimenziós algebra, akkor létezik egy véges dimenziós B algebra úgy, hogy teljesülnek a következők:*

1. *gl dim $B < \infty$*
2. *létezik $e^2 = e \in B$ úgy, hogy $A \cong eBe$*

Auslander konstrukciója

Tétel

(Auslander) *Ha A véges dimenziós algebra, akkor létezik egy véges dimenziós B algebra úgy, hogy teljesülnek a következők:*

1. *gl dim $B < \infty$*
2. *létezik $e^2 = e \in B$ úgy, hogy $A \cong eBe$*

B konstrukciója a következő: J az A Jacobson radikálja, és teljesül rá, hogy $J^n = 0$. Legyen $M := (A/J)_A \oplus \left(A/J^2\right)_A \oplus \ldots \oplus \left(A/J^n\right)_A$. Ekkor $B := End(M_A)$ a keresett algebra.

Auslander konstrukciója

Tétel

(Auslander) *Ha A véges dimenziós algebra, akkor létezik egy véges dimenziós B algebra úgy, hogy teljesülnek a következők:*

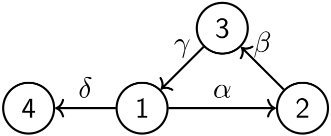
1. *$gl\ dim\ B < \infty$*
2. *létezik $e^2 = e \in B$ úgy, hogy $A \cong eBe$*

B konstrukciója a következő: J az A Jacobson radikálja, és teljesül rá, hogy $J^n = 0$. Legyen $M := (A/J)_A \oplus \left(A/J^2\right)_A \oplus \ldots \oplus \left(A/J^n\right)_A$. Ekkor $B := End(M_A)$ a keresett algebra.

Theorem

(Dlab-Ringel) *Az ADR algebra kváziöröklődő.*

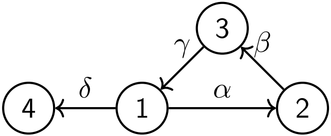
Példa az Auslander konstrukcióra



Vegyük az ábrán látható gráf faktorát a $\gamma\alpha = \gamma\delta = 0$ által generált ideálnál.

$$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \end{smallmatrix}$$

Példa az Auslander konstrukcióra



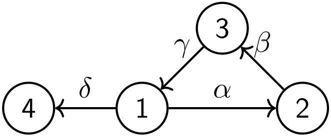
Vegyük az ábrán látható gráf faktorát a $\gamma\alpha = \gamma\delta = 0$ által generált ideálnál.

$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 4$

M direkt összeadandói közül kihagyjuk azokat, amelyek már szerepelnek a felsorolásban.

Ezt megtehetjük, mert az így kapott M'-re $EndM'$ Morita ekvivalens lesz $EndM$-mel.

Példa az Auslander konstrukcióra



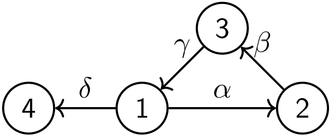
Vegyük az ábrán látható gráf faktorát a $\gamma\alpha = \gamma\delta = 0$ által generált ideálnál.

$$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 4$$

M direkt összeadandói közül kihagyjuk azokat, amelyek már szerepelnek a felsorolásban. Ezt megtehetjük, mert az így kapott M'-re $EndM'$ Morita ekvivalens lesz $EndM$-mel.

$$\underbrace{\overbrace{1}^{a} \oplus \overbrace{2}^{b} \oplus \overbrace{3}^{c} \oplus \overbrace{4}^{d}}_{A/J} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \end{smallmatrix}}^{e} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}^{f} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}}^{g}}_{(A/J^2)'} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \end{smallmatrix}}^{h} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}}^{i}}_{(A/J^3)'} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix}}^{j}}_{(A/J^4)'}$$

Példa az Auslander konstrukcióra



Vegyük az ábrán látható gráf faktorát a $\gamma\alpha = \gamma\delta = 0$ által generált ideálnál.

$$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 4$$

M direkt összeadandói közül kihagyjuk azokat, amelyek már szerepelnek a felsorolásban. Ezt megtehetjük, mert az így kapott M'-re $EndM'$ Morita ekvivalens lesz $EndM$-mel.

$$\underbrace{\overbrace{1}^{a} \oplus \overbrace{2}^{b} \oplus \overbrace{3}^{c} \oplus \overbrace{4}^{d}}_{A/J} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \end{smallmatrix}}^{e} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}^{f} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}}^{g}}_{(A/J^2)'} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \end{smallmatrix}}^{h} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}}^{i}}_{(A/J^3)'} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix}}^{j}}_{(A/J^4)'}$$

B-t egy megfelelő gráf gráfalgebrájaként keressük. A fent felsorolt direkt összeadandók (melyeket jelöljük a fenti előfordulási sorrendben $a, b, \dots\ j$ betűkkel) lesznek az új gráf csúcsai. Meg kell találjuk a csúcsok közti éleket, azaz a direkt komponensek közötti morfizmusokat.

B számolása - 1

$$\underbrace{\overbrace{1}^{a} \oplus \overbrace{2}^{b} \oplus \overbrace{3}^{c} \oplus \overbrace{4}^{d}}_{A/J} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4\end{smallmatrix}}^{e} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}}^{f} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}}^{g}}_{(A/J^2)'} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \end{smallmatrix}}^{h} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix}}^{i}}_{(A/J^3)'} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4\\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix}}^{j}}_{(A/J^4)'}$$

a-ból csak 1-et tartalmazó komponensbe mehetnek morfizmusok, azaz $g = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$; $i = \begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix}$ és $j = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4\\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix}$-be.

Végignézve, hogy mely morfizmusok vezethetők keresztül egymáson, kapjuk: $\quad Be_a = \begin{smallmatrix}a\\g\\i\\j\end{smallmatrix}$.

B számolása - 1

$$\underbrace{\overbrace{1}^{a}\oplus\overbrace{2}^{b}\oplus\overbrace{3}^{c}\oplus\overbrace{4}^{d}}_{A/J}\oplus\underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix}&1&\\2&&4\end{smallmatrix}}^{e}\oplus\overbrace{\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}}^{f}\oplus\overbrace{\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}}^{g}}_{(A/J^2)'}\oplus\underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix}&1&\\2&&4\\3&&\end{smallmatrix}}^{h}\oplus\overbrace{\begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix}}^{i}}_{(A/J^3)'}\oplus\underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix}&1&\\2&&4\\3&&\\1&&\end{smallmatrix}}^{j}}_{(A/J^4)'}$$

a-ból csak ${\color{red}1}$-et tartalmazó komponensbe mehetnek morfizmusok, azaz $g=\begin{smallmatrix}{\color{blue}3}\\{\color{red}1}\end{smallmatrix}$; $i=\begin{smallmatrix}{\color{green}2}\\{\color{blue}3}\\{\color{red}1}\end{smallmatrix}$ és $j=\begin{smallmatrix}&1&\\{\color{green}2}&&4\\{\color{blue}3}&&\\{\color{red}1}&&\end{smallmatrix}$-be.

Végignézve, hogy mely morfizmusok vezethetők keresztül egymáson, kapjuk: $Be_a=\begin{smallmatrix}a\\g\\i\\j\end{smallmatrix}$.

$$\underbrace{{\color{red}1}}_{a}\longrightarrow\underbrace{\begin{smallmatrix}{\color{blue}3}\\{\color{red}1}\end{smallmatrix}}_{g}\longrightarrow\underbrace{\begin{smallmatrix}{\color{green}2}\\{\color{blue}3}\\{\color{red}1}\end{smallmatrix}}_{i}\longrightarrow\underbrace{\begin{smallmatrix}&1&\\{\color{green}2}&&4\\{\color{blue}3}&&\\{\color{red}1}&&\end{smallmatrix}}_{j}$$

B számolása - 1

$$\underbrace{\overbrace{1}^{a} \oplus \overbrace{2}^{b} \oplus \overbrace{3}^{c} \oplus \overbrace{4}^{d}}_{A/J} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \end{smallmatrix}}^{e} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}^{f} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}}^{g}}_{(A/J^2)'} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \end{smallmatrix}}^{h} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}}^{i}}_{(A/J^3)'} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix}}^{j}}_{(A/J^4)'}$$

a-ból csak $\color{red}{1}$-et tartalmazó komponensbe mehetnek morfizmusok, azaz
$g = \begin{smallmatrix} \color{blue}{3} \\ \color{red}{1} \end{smallmatrix}$; $i = \begin{smallmatrix} \color{green}{2} \\ \color{blue}{3} \\ \color{red}{1} \end{smallmatrix}$ és $j = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ \color{green}{2} & & 4 \\ \color{blue}{3} & & \\ \color{red}{1} & & \end{smallmatrix}$-be.

Végignézve, hogy mely morfizmusok vezethetők keresztül egymáson,
kapjuk: $Be_a = \begin{smallmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix}$.

Hasonlóan: $Be_b = \begin{smallmatrix} b \\ e \end{smallmatrix}$; $Be_c = \begin{smallmatrix} c \\ f \\ h \end{smallmatrix}$ és $Be_d = \begin{smallmatrix} d \\ j \\ i \\ h \end{smallmatrix}$.

B számolása - 1

$$\underbrace{\overbrace{1}^{a}\oplus\overbrace{2}^{b}\oplus\overbrace{3}^{c}\oplus\overbrace{4}^{d}}_{A/J}\oplus\underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4\end{smallmatrix}}^{e}\oplus\overbrace{\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}}^{f}\oplus\overbrace{\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}}^{g}}_{(A/J^2)'}\oplus\underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \end{smallmatrix}}^{h}\oplus\overbrace{\begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix}}^{i}}_{(A/J^3)'}\oplus\underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4\\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix}}^{j}}_{(A/J^4)'}$$

a-ból csak 1-et tartalmazó komponensbe mehetnek morfizmusok, azaz $g = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}$; $i = \begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix}$ és $j = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4\\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix}$-be.

Végignézve, hogy mely morfizmusok vezethetők keresztül egymáson, kapjuk: $Be_a = \begin{smallmatrix}a\\g\\i\\j\end{smallmatrix}$.

Hasonlóan: $Be_b = \begin{smallmatrix}b\\e\end{smallmatrix}$; $Be_c = \begin{smallmatrix}c\\f\\h\end{smallmatrix}$ és $Be_d = \begin{smallmatrix}d\\j\\i\\h\end{smallmatrix}$.

Be_e esetében e-n kívül nem találunk olyan komponenst, amelyben $e = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4\end{smallmatrix}$ a komponens legalján lenne, viszont ha faktorizálunk (mely szintén morfizmus), akkor eljuthatunk $a = 1$-ba. Innen pedig a fenti módszerrel már ismerjük a morfizmusokat, vagyis kapjuk, hogy $Be_e = \begin{smallmatrix}e\\a\\g\\i\\j\end{smallmatrix}$.

B számolása - 1

a-ból csak $\color{red}{1}$-et tartalmazó komponensbe mehetnek morfizmusok, azaz $g = \begin{smallmatrix}\color{blue}{3}\\ \color{red}{1}\end{smallmatrix}$; $i = \begin{smallmatrix}\color{green}{2}\\ \color{blue}{3}\\ \color{red}{1}\end{smallmatrix}$ és $j = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ \color{green}{2} & & 4\\ \color{blue}{3} & & \\ \color{red}{1} & & \end{smallmatrix}$-be.

Végignézve, hogy mely morfizmusok vezethetők keresztül egymáson, kapjuk: $Be_a = \begin{smallmatrix}a\\ g\\ i\\ j\end{smallmatrix}$.

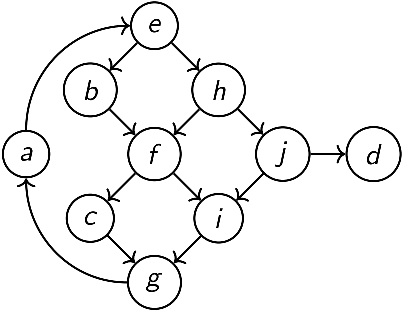
Hasonlóan: $Be_b = \begin{smallmatrix}b\\ e\end{smallmatrix}$; $Be_c = \begin{smallmatrix}c\\ f\\ h\end{smallmatrix}$ és $Be_d = \begin{smallmatrix}d\\ j\\ i\\ h\end{smallmatrix}$.

Be_e esetében e-n kívül nem találunk olyan komponenst, amelyben $e = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4\end{smallmatrix}$ a komponens legalján lenne, viszont ha faktorizálunk (mely szintén morfizmus), akkor eljuthatunk $a = 1$-ba. Innen pedig a fenti módszerrel már ismerjük a morfizmusokat, vagyis kapjuk, hogy $Be_e = \begin{smallmatrix}e\\ a\\ g\\ i\\ j\end{smallmatrix}$.

Ugyanezzel a módszerrel adódik: $Be_h = \begin{smallmatrix}h\\ e\\ a\\ g\\ i\\ j\end{smallmatrix}$, és $Be_j = \begin{smallmatrix}j\\ h\\ e\\ a\\ g\\ i\\ j\end{smallmatrix}$.

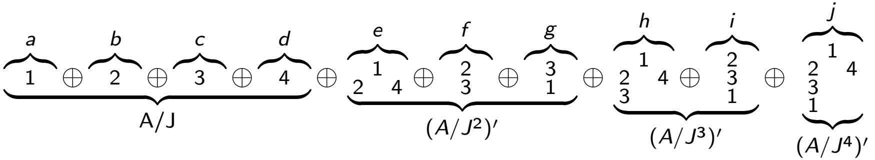
B számolása - 2

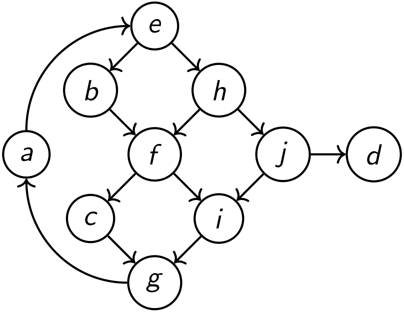
$$\underbrace{\overbrace{1}^{a} \oplus \overbrace{2}^{b} \oplus \overbrace{3}^{c} \oplus \overbrace{4}^{d}}_{A/J} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \end{smallmatrix}}^{e} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}}^{f} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}}^{g}}_{(A/J^2)'} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \end{smallmatrix}}^{h} \oplus \overbrace{\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}}^{i}}_{(A/J^3)'} \oplus \underbrace{\overbrace{\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \\ 1 & & \end{smallmatrix}}^{j}}_{(A/J^4)'}$$



Be_f esetében két irányba mehetünk: $f = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$-et faktorizálva $b = 2$-be jutunk, majd ezt beleképezzük $e = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \end{smallmatrix}$-be. A másik, hogy f-et $h = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \end{smallmatrix}$-ba képezzük, majd ezt faktorizálva jutunk el e-be. $f \to e$ keresztülvezethető $f \to b$ és $f \to h$-n is, ezek között azonban nincs kapcsolat, így kapjuk, hogy $Be_f = \begin{smallmatrix} & f & \\ b & & h \\ & e & \end{smallmatrix}$

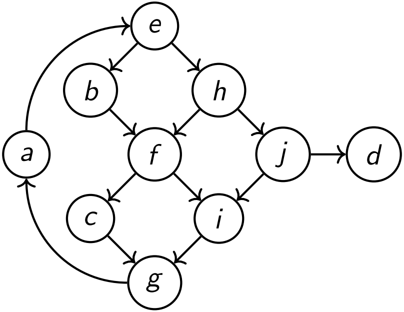
B számolása - 2





Be_f esetében két irányba mehetünk:
$f = \begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$-et faktorizálva $b = 2$-be jutunk, majd ezt beleképezzük $e = \begin{smallmatrix}&1&\\2&&4\end{smallmatrix}$-be.
A másik, hogy f-et $h = \begin{smallmatrix}&1&\\2&&4\\3&&\end{smallmatrix}$-ba képezzük, majd ezt faktorizálva jutunk el e-be. $f \to e$ keresztülvezethető $f \to b$ és $f \to h$-n is, ezek között azonban nincs kapcsolat, így kapjuk, hogy $Be_f = \begin{smallmatrix}&f&\\b&&h\\&e&\end{smallmatrix}$
Ugyanezzel a módszerrel adódik, hogy:
$Be_g = \begin{smallmatrix}&g&&\\c&&i&\\&f&&j\\&&h&\end{smallmatrix}$; $Be_i = \begin{smallmatrix}&&i&\\&f&&j\\b&&h&\\&e&&\end{smallmatrix}$

B számolása - 2



Be_f esetében két irányba mehetünk: $f = \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$-et faktorizálva $b = 2$-be jutunk, majd ezt beleképezzük $e = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \end{smallmatrix}$-be. A másik, hogy f-et $h = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 3 & & \end{smallmatrix}$-ba képezzük, majd ezt faktorizálva jutunk el e-be. $f \to e$ keresztülvezethető $f \to b$ és $f \to h$-n is, ezek között azonban nincs kapcsolat, így kapjuk, hogy $Be_f = \begin{smallmatrix} & f & \\ b & & h \\ & e & \end{smallmatrix}$

Ugyanezzel a módszerrel adódik, hogy:

$Be_g = \begin{smallmatrix} & g & & \\ c & & i & \\ & f & & j \\ & & h & \end{smallmatrix}$; $Be_i = \begin{smallmatrix} & & i & \\ & f & & j \\ b & & h & \\ & e & & \end{smallmatrix}$

Mindent összevetve, kapjuk tehát, hogy:

$$_BB = \begin{smallmatrix} a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} b \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c \\ f \\ h \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d \\ j \\ h \\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & f & \\ b & & h \\ & e & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & g & & \\ c & & i & \\ & f & & j \\ & & h & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & & i & \\ & f & & j \\ b & & h & \\ & e & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} j \\ h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{smallmatrix}$$

B kváziöröklődő

Az idempotensek sorrendje: e_a, e_b, e_c, e_d, e_e, e_f, e_g, e_h, e_i, e_j

$$
{}_B B = \begin{array}{c} a \\ g \\ i \\ j \end{array} \oplus \begin{array}{c} b \\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} c \\ f \\ h \end{array} \oplus \begin{array}{c} d \\ j \\ h \\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & f & \\ b & & h \\ & e & \end{array} \oplus \begin{array}{cccc} & g & & \\ c & & i & \\ & f & & j \\ & & h & \end{array} \oplus \begin{array}{c} h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{array} \oplus \begin{array}{cccc} & & i & \\ & f & & j \\ b & & h & \\ & e & & \end{array} \oplus \begin{array}{c} j \\ h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{array}
$$

B kváziöröklődő

Az idempotensek sorrendje: $e_a,\ e_b,\ e_c,\ e_d,\ e_e,\ e_f,\ e_g,\ e_h,\ e_i,\ e_j$

$$_BB = \begin{smallmatrix} a\\ g\\ i\\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} b\\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} c\\ f\\ h \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} d\\ j\\ h\\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} e\\ a\\ g\\ i\\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & f & \\ b & & h\\ & e & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & g & & \\ c & & i & \\ & f & & j\\ & & h & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} h\\ e\\ a\\ g\\ i\\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & & i & \\ & f & & j\\ b & & h & \\ & e & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} j\\ h\\ e\\ a\\ g\\ i\\ j \end{smallmatrix}$$

$$Be_aB = \begin{smallmatrix} a\\ g\\ i\\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} a\\ g\\ i\\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} a\\ g\\ i\\ j \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} a\\ g\\ i\\ j \end{smallmatrix};\ B(e_a+e_b)B/Be_aB = \begin{smallmatrix} b\\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} b\\ e \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} b\\ e \end{smallmatrix}; \ldots$$

$B(e_a+e_b+\ldots+e_j)B/B(e_a+e_b+\ldots+e_i)B = j$ projektívak.

B kváziöröklődő

Az idempotensek sorrendje: e_a, e_b, e_c, e_d, e_e, e_f, e_g, e_h, e_i, e_j

$$_BB = \begin{array}{c} a \\ g \\ i \\ j \end{array} \oplus \begin{array}{c} b \\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} c \\ f \\ h \end{array} \oplus \begin{array}{c} d \\ j \\ h \\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & f & \\ b & & h \\ & e & \end{array} \oplus \begin{array}{cccc} & g & & \\ c & & i & \\ & f & & j \\ & & h & \end{array} \oplus \begin{array}{c} h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{array} \oplus \begin{array}{cccc} & & i & \\ & f & & j \\ b & & h & \\ & e & & \end{array} \oplus \begin{array}{c} j \\ h \\ e \\ a \\ g \\ i \\ j \end{array}$$

$$Be_aB = \begin{array}{c} a \\ g \\ i \\ j \end{array} \oplus \begin{array}{c} a \\ g \\ i \\ j \end{array} \oplus \begin{array}{c} a \\ g \\ i \\ j \end{array} \oplus \begin{array}{c} a \\ g \\ i \\ j \end{array}; \; B(e_a + e_b)B/Be_aB = \begin{array}{c} b \\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} b \\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} b \\ e \end{array}; \ldots$$

$B(e_a + e_b + \ldots + e_j)B/B(e_a + e_b + \ldots + e_i)B = j$ projektívak.
Az $IJI = 0$ tulajdonság teljesül, a levágott ideálokra igaz, hogy a legfelső elem később már nem fordul elő. (Nem lehetnek olyan utak, mely ugyanott végződnek, ahol kezdődtek)

Az idempotensek sorrendje: e_a, e_b, e_c, e_d, e_e, e_f, e_g, e_h, e_i, e_j

$${}_BB = \begin{smallmatrix}a\\g\\i\\j\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}b\\e\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}c\\f\\h\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}d\\j\\h\\e\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}e\\a\\g\\i\\j\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & f & \\ b & & h \\ & e & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & g & & \\ c & & i & \\ & f & & j \\ & & h & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}h\\e\\a\\g\\i\\j\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & & i & \\ & f & & j \\ b & & h & \\ & e & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}j\\h\\e\\a\\g\\i\\j\end{smallmatrix}$$

$$Be_aB = \begin{smallmatrix}a\\g\\i\\j\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}a\\g\\i\\j\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}a\\g\\i\\j\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}a\\g\\i\\j\end{smallmatrix};\ B(e_a+e_b)B/Be_aB = \begin{smallmatrix}b\\e\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}b\\e\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}b\\e\end{smallmatrix}; \ldots$$

$B(e_a + e_b + \ldots + e_j)B/B(e_a + e_b + \ldots + e_i)B = j$ projektívak.

Az $IJI = 0$ tulajdonság teljesül, a levágott ideálokra igaz, hogy a legfelső elem később már nem fordul elő. (Nem lehetnek olyan utak, mely ugyanott végződnek, ahol kezdődtek)

Hasonlóan ellenőrizhető, hogy ha a kezdeti (A/J^i)-ből származó tagokhoz tartozó komponenseket együtt vágjuk le, az örökletes ideállánc rövidebb

$${}_BB = \begin{smallmatrix}a\\g\\i\\j\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}b\\e\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}c\\f\\h\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}d\\j\\h\\e\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}e\\a\\g\\i\\j\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & f & \\ b & & h \\ & e & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & g & & \\ c & & i & \\ & f & & j \\ & & h & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}h\\e\\a\\g\\i\\j\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & & i & \\ & f & & j \\ b & & h & \\ & e & & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}j\\h\\e\\a\\g\\i\\j\end{smallmatrix}$$

B kváziöröklődő

Az idempotensek sorrendje: e_a, e_b, e_c, e_d, e_e, e_f, e_g, e_h, e_i, e_j

$$ {}_B B = \begin{array}{c} a\\ g\\ i\\ j \end{array} \oplus \begin{array}{c} b\\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} c\\ f\\ h \end{array} \oplus \begin{array}{c} d\\ j\\ h\\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} e\\ a\\ g\\ i\\ j \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & f & \\ b & & h\\ & e & \end{array} \oplus \begin{array}{cccc} & g & & \\ c & & i & \\ & f & & j\\ & & h & \end{array} \oplus \begin{array}{c} h\\ e\\ a\\ g\\ i\\ j \end{array} \oplus \begin{array}{cccc} & & i & \\ & f & & j\\ b & & h & \\ & e & & \end{array} \oplus \begin{array}{c} j\\ h\\ e\\ a\\ g\\ i\\ j \end{array} $$

$$ Be_aB = \begin{array}{c} a\\ g\\ i\\ j \end{array} \oplus \begin{array}{c} a\\ g\\ i\\ j \end{array} \oplus \begin{array}{c} a\\ g\\ i\\ j \end{array} \oplus \begin{array}{c} a\\ g\\ i\\ j \end{array};\ B(e_a+e_b)B/Be_aB = \begin{array}{c} b\\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} b\\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} b\\ e \end{array}; \ldots $$

$B(e_a + e_b + \ldots + e_j)B/B(e_a + e_b + \ldots + e_i)B = j$ projektívak.
Az $IJI = 0$ tulajdonság teljesül, a levágott ideálokra igaz, hogy a legfelső elem később már nem fordul elő. (Nem lehetnek olyan utak, mely ugyanott végződnek, ahol kezdődtek)
Hasonlóan ellenőrizhető, hogy ha a kezdeti (A/J^i)-ből származó tagokhoz tartozó komponenseket együtt vágjuk le, az örökletes ideállánc rövidebb

$$ {}_B B = \begin{array}{c} a\\ g\\ i\\ j \end{array} \oplus \begin{array}{c} b\\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} c\\ f\\ h \end{array} \oplus \begin{array}{c} d\\ j\\ h\\ e \end{array} \oplus \begin{array}{c} e\\ a\\ g\\ i\\ j \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & f & \\ b & & h\\ & e & \end{array} \oplus \begin{array}{cccc} & g & & \\ c & & i & \\ & f & & j\\ & & h & \end{array} \oplus \begin{array}{c} h\\ e\\ a\\ g\\ i\\ j \end{array} \oplus \begin{array}{cccc} & & i & \\ & f & & j\\ b & & h & \\ & e & & \end{array} \oplus \begin{array}{c} j\\ h\\ e\\ a\\ g\\ i\\ j \end{array} $$

Ebben az esetben a globális dimenzió 2, az ideállánc hossza 4.

Irodalom

- VLASTIMIL DLAB - CLAUS MICHAEL RINGEL, *Quasi-hereditary algebras*, Illinois journal of mathematics Volume 33, Number 2, Summer 1989
- VLASTIMIL DLAB - CLAUS MICHAEL RINGEL, *Every semiprimary ring is the endomorphism ring of a projective module over a quasi-hereditary ring*, Proceedings of the American Mathematical Society Volume 107. Number I. September 1989
- CLAUS MICHAEL RINGEL, *Iyama's finiteness theorem via strongly quasi-hereditary algebras.*, https://arxiv.org/abs/0912.5001v1 [math.RT] 26 Dec 2009