Többszörösen telítő halmazok és MCF-kódok

Egyéni kutatómunka beszámoló

Pituk Sára

Témavezető: Kiss György

2020. december 18.

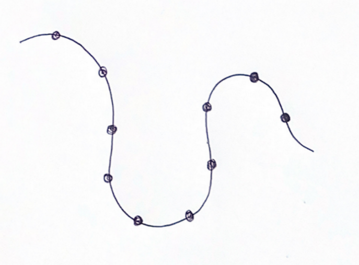
A momentumgörbe

Definíció

A $PG(3,q)$ térben momentumgörbének nevezünk egy a

$$\mathcal{C} = \{(t^3, t^2, t, 1) : t \in GF(q)\} \cup \{(1,0,0,0)\}$$

ponthalmazzal projektíve ekvivalens halmazt.



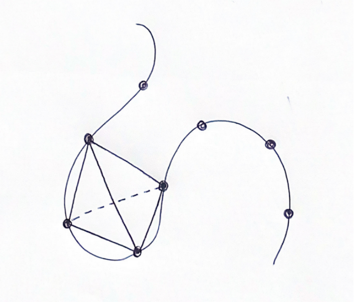
A momentumgörbe

Definíció

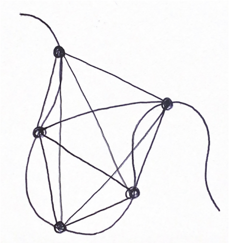
A $PG(3,q)$ térben momentumgörbének nevezünk egy a

$$\mathcal{C} = \{(t^3, t^2, t, 1) : t \in GF(q)\} \cup \{(1,0,0,0)\}$$

ponthalmazzal projektíve ekvivalens halmazt.



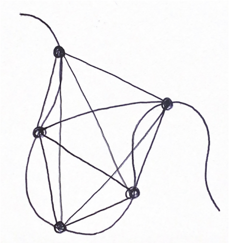
A momentumgörbe



- Szelők által lefedett pontok száma:

$$\leq (q+1)+\binom{q+1}{2}(q-1) = \frac{q^3+q+2}{2}$$

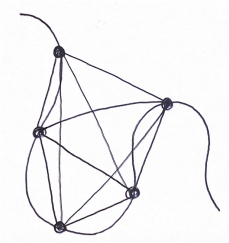
A momentumgörbe



- Szelők által lefedett pontok száma:

$$=(q+1)+\binom{q+1}{2}(q-1)=\frac{q^3+q+2}{2}$$

A momentumgörbe



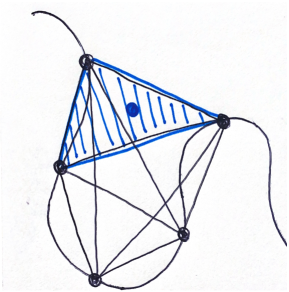
- Szelők által lefedett pontok száma:

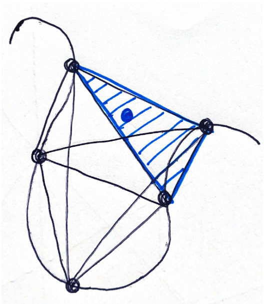
$$=(q+1)+\binom{q+1}{2}(q-1)=\frac{q^3+q+2}{2}$$

- $|PG(3,q)|=q^3+q^2+q+1$

A momentumgörbe

Viszont:





Minden szelőkön kívül eső ponton át legalább μ, a görbét 3 pontban metsző sík megy.

Mennyi a μ?

Daniele Bartoli, Alexander A. Davydov, Stefano Marcugini, Fernanda Pambianco, *On planes through points off the twisted cubic in PG(3,q) and multiple covering codes*, Finite Fields and Applications, 67 (2020), paper 101710

- a $\mathcal{C}$-t fixen hagyó projektivitások csoportja $q \geq 5$ esetén $\cong PGL(2, q)$
- a pontoknak és a síkoknak is 5 orbitja van

Mennyi a μ?

Daniele Bartoli, Alexander A. Davydov, Stefano Marcugini, Fernanda Pambianco, *On planes through points off the twisted cubic in PG(3,q) and multiple covering codes*, Finite Fields and Applications, 67 (2020), paper 101710

- a $\mathcal{C}$-t fixen hagyó projektivitások csoportja $q \geq 5$ esetén $\cong PGL(2, q)$
- a pontoknak és a síkoknak is 5 orbitja van

Mennyi a μ?

Daniele Bartoli, Alexander A. Davydov, Stefano Marcugini, Fernanda Pambianco, *On planes through points off the twisted cubic in PG(3,q) and multiple covering codes*, Finite Fields and Applications, 67 (2020), paper 101710

- a $\mathcal{C}$-t fixen hagyó projektivitások csoportja $q \geq 5$ esetén $\cong PGL(2, q)$
- a pontoknak és a síkoknak is 5 orbitja van

Síkorbitok

- $P(t)$ pontbeli *oszkuláló sík:* $\pi(t) = (1, -3t, 3t^2, -t^3)$; $\pi(\infty) = (0, 0, 0, 1)$
- $\pi(t) \cap \mathcal{C} = P(t)$

Orbitok:

1. oszkuláló síkok
2. síkok, amelyek a görbét 2 pontban metszik
3. síkok, amelyek a görbét 3 pontban metszik
4. síkok, amelyek a görbét 1 pontban metszik, de nem oszkuláló síkok
5. síkok, amelyek nem metszik a görbét

Síkorbitok

- $P(t)$ pontbeli *oszkuláló sík:* $\pi(t) = (1, -3t, 3t^2, -t^3)$; $\pi(\infty) = (0, 0, 0, 1)$
- $\pi(t) \cap \mathcal{C} = P(t)$

Orbitok:

1. oszkuláló síkok
2. síkok, amelyek a görbét 2 pontban metszik
3. síkok, amelyek a görbét 3 pontban metszik
4. síkok, amelyek a görbét 1 pontban metszik, de nem oszkuláló síkok
5. síkok, amelyek nem metszik a görbét

Síkorbitok

- $P(t)$ pontbeli *oszkuláló sík:* $\pi(t) = (1, -3t, 3t^2, -t^3)$; $\pi(\infty) = (0, 0, 0, 1)$
- $\pi(t) \cap \mathcal{C} = P(t)$

Orbitok:

1. oszkuláló síkok
2. síkok, amelyek a görbét 2 pontban metszik
3. síkok, amelyek a görbét 3 pontban metszik
4. síkok, amelyek a görbét 1 pontban metszik, de nem oszkuláló síkok
5. síkok, amelyek nem metszik a görbét

Síkorbitok

- $P(t)$ pontbeli *oszkuláló sík:* $\pi(t) = (1, -3t, 3t^2, -t^3)$; $\pi(\infty) = (0, 0, 0, 1)$
- $\pi(t) \cap \mathcal{C} = P(t)$

Orbitok:

1. oszkuláló síkok
2. síkok, amelyek a görbét 2 pontban metszik
3. síkok, amelyek a görbét 3 pontban metszik
4. síkok, amelyek a görbét 1 pontban metszik, de nem oszkuláló síkok
5. síkok, amelyek nem metszik a görbét

Síkorbitok

- $P(t)$ pontbeli *oszkuláló sík:* $\pi(t) = (1, -3t, 3t^2, -t^3)$; $\pi(\infty) = (0, 0, 0, 1)$
- $\pi(t) \cap \mathcal{C} = P(t)$

Orbitok:

1. oszkuláló síkok
2. síkok, amelyek a görbét 2 pontban metszik
3. síkok, amelyek a görbét 3 pontban metszik
4. síkok, amelyek a görbét 1 pontban metszik, de nem oszkuláló síkok
5. síkok, amelyek nem metszik a görbét

Síkorbitok

- $P(t)$ pontbeli *oszkuláló sík:* $\pi(t) = (1, -3t, 3t^2, -t^3)$; $\pi(\infty) = (0, 0, 0, 1)$
- $\pi(t) \cap \mathcal{C} = P(t)$

Orbitok:

1. oszkuláló síkok
2. síkok, amelyek a görbét 2 pontban metszik
3. síkok, amelyek a görbét 3 pontban metszik
4. síkok, amelyek a görbét 1 pontban metszik, de nem oszkuláló síkok
5. síkok, amelyek nem metszik a görbét

Síkorbitok

- $P(t)$ pontbeli *oszkuláló sík:* $\pi(t) = (1, -3t, 3t^2, -t^3)$; $\pi(\infty) = (0, 0, 0, 1)$
- $\pi(t) \cap \mathcal{C} = P(t)$

Orbitok:

1. oszkuláló síkok
2. síkok, amelyek a görbét 2 pontban metszik
3. síkok, amelyek a görbét 3 pontban metszik
4. síkok, amelyek a görbét 1 pontban metszik, de nem oszkuláló síkok
5. síkok, amelyek nem metszik a görbét

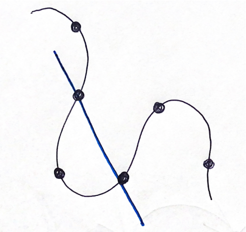
Síkorbitok

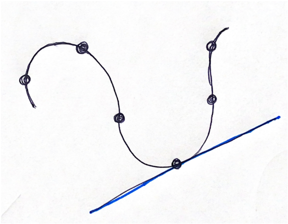
- $P(t)$ pontbeli *oszkuláló sík:* $\pi(t) = (1, -3t, 3t^2, -t^3)$; $\pi(\infty) = (0,0,0,1)$
- $\pi(t) \cap \mathcal{C} = P(t)$

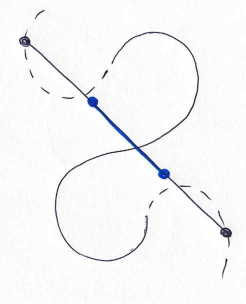
Orbitok:

1. oszkuláló síkok
2. síkok, amelyek a görbét 2 pontban metszik
3. síkok, amelyek a görbét 3 pontban metszik
4. síkok, amelyek a görbét 1 pontban metszik, de nem oszkuláló síkok
5. síkok, amelyek nem metszik a görbét

Pontorbitok







Pontorbitok

($q \not\equiv 0 \mod 3$ esetén)

1. C pontjai
2. az érintők pontjai
3. pontok, amelyek pontosan 3 oszkuláló síkra illeszkednek
4. pontok, amelyek pontosan 1 oszkuláló síkra illeszkednek
5. pontok, amelyek 1 oszkuláló síkra sem illeszkednek

Pontorbitok

($q \not\equiv 0 \mod 3$ esetén)

1. C pontjai
2. az érintők pontjai
3. pontok, amelyek pontosan 3 oszkuláló síkra illeszkednek
4. pontok, amelyek pontosan 1 oszkuláló síkra illeszkednek
5. pontok, amelyek 1 oszkuláló síkra sem illeszkednek

Pontorbitok

($q \not\equiv 0 \mod 3$ esetén)

1. C pontjai
2. az érintők pontjai
3. pontok, amelyek pontosan 3 oszkuláló síkra illeszkednek
4. pontok, amelyek pontosan 1 oszkuláló síkra illeszkednek
5. pontok, amelyek 1 oszkuláló síkra sem illeszkednek

Pontorbitok

($q \not\equiv 0 \mod 3$ esetén)

1. C pontjai
2. az érintők pontjai
3. pontok, amelyek pontosan 3 oszkuláló síkra illeszkednek
4. pontok, amelyek pontosan 1 oszkuláló síkra illeszkednek
5. pontok, amelyek 1 oszkuláló síkra sem illeszkednek

Pontorbitok

($q \not\equiv 0 \mod 3$ esetén)

1. C pontjai
2. az érintők pontjai
3. pontok, amelyek pontosan 3 oszkuláló síkra illeszkednek
4. pontok, amelyek pontosan 1 oszkuláló síkra illeszkednek
5. pontok, amelyek 1 oszkuláló síkra sem illeszkednek

Pontorbitok

($q \not\equiv 0 \mod 3$ esetén)

1. C pontjai
2. az érintők pontjai
3. pontok, amelyek pontosan 3 oszkuláló síkra illeszkednek
4. pontok, amelyek pontosan 1 oszkuláló síkra illeszkednek
5. pontok, amelyek 1 oszkuláló síkra sem illeszkednek

Pontorbitok

$(q \equiv 0 \mod 3)$ esetén

1. C pontjai
2. pontok, amelyek pontosan $q+1$ oszkuláló síkra illeszkednek
3. pontok, amelyek rajta vannak egy érintőn és pontosan 1 oszkuláló síkon
4. valós szelők pontjai
5. képzetes szelők pontjai

Pontorbitok

$(q \equiv 0 \mod 3)$ esetén

1. C pontjai
2. pontok, amelyek pontosan $q+1$ oszkuláló síkra illeszkednek
3. pontok, amelyek rajta vannak egy érintőn és pontosan 1 oszkuláló síkon
4. valós szelők pontjai
5. képzetes szelők pontjai

Pontorbitok

($q \equiv 0 \mod 3$) esetén

1. C pontjai
2. pontok, amelyek pontosan $q+1$ oszkuláló síkra illeszkednek
3. pontok, amelyek rajta vannak egy érintőn és pontosan 1 oszkuláló síkon
4. valós szelők pontjai
5. képzetes szelők pontjai

Pontorbitok

$(q \equiv 0 \mod 3)$ esetén

1. C pontjai
2. pontok, amelyek pontosan $q+1$ oszkuláló síkra illeszkednek
3. pontok, amelyek rajta vannak egy érintőn és pontosan 1 oszkuláló síkon
4. valós szelők pontjai
5. képzetes szelők pontjai

Pontorbitok

$(q \equiv 0 \mod 3)$ esetén

1. C pontjai
2. pontok, amelyek pontosan $q+1$ oszkuláló síkra illeszkednek
3. pontok, amelyek rajta vannak egy érintőn és pontosan 1 oszkuláló síkon
4. valós szelők pontjai
5. képzetes szelők pontjai

Pontorbitok
$(q \equiv 0 \mod 3)$ esetén

1. C pontjai
2. pontok, amelyek pontosan $q+1$ oszkuláló síkra illeszkednek
3. pontok, amelyek rajta vannak egy érintőn és pontosan 1 oszkuláló síkon
4. valós szelők pontjai
5. képzetes szelők pontjai

Mennyi a μ?

- a $\mathcal{C}$-t fixen hagyó projektivitások csoportja $q \geq 5$ esetén $\cong PGL(2,q)$
- a pontoknak és a síkoknak is 5 orbitja van
- $\mathcal{N}$ egy síkorbit, $\mathcal{M}$ egy pontorbit $\Rightarrow$
  - egy $\mathcal{M}$-beli ponton átmenő $\mathcal{N}$-beli síkok száma $\mathcal{M}$ minden pontjára ugyanannyi
  - egy $\mathcal{N}$-beli síkon levő $\mathcal{M}$-beli pontok száma $\mathcal{N}$ minden síkjára ugyanannyi

Table 1: Values k_{ij} (the number of ones in every row, top entry) and r_{ij} (the number of ones in every column, bottom entry) for the $\#\mathcal{N}_i \times \#\mathcal{M}_j$ submatrices $\mathcal{I}_{ij}$ of the point-plane incidence matrix of $PG(3,q)$, $q \equiv \xi \pmod 3$, $\xi = -1, 1$, $q \geq 5$

$\mathcal{N}_i$ $\downarrow$	$\mathcal{M}_j \rightarrow$		$\mathcal{M}_1$ $\mathcal{C}$-points $q+1$	$\mathcal{M}_2$ T-points q^2+q	$\mathcal{M}_3$ 3_Γ-points $\frac{1}{6}(q^3-q)$	$\mathcal{M}_4$ 1_Γ-points $\frac{1}{2}(q^3-q)$	$\mathcal{M}_5$ 0_Γ-points $\frac{1}{3}(q^3-q)$
$\mathcal{N}_1$	Γ-planes	k_{1j}	1	$2q$	$\frac{1}{2}(q^2-q)$	$\frac{1}{2}(q^2-q)$	0
	$q+1$	r_{1j}	1	2	3	1	0
$\mathcal{N}_2$	$2_{\mathcal{C}}$-planes	k_{2j}	2	$2q-1$	$\frac{1}{6}(q^2-3q+2)$	$\frac{1}{2}(q^2-q)$	$\frac{1}{3}(q^2-1)$
	q^2+q	r_{2j}	$2q$	$2q-1$	$q-2$	q	$q+1$
$\mathcal{N}_3$	$3_{\mathcal{C}}$-planes	k_{3j}	3	$q-2$	$\frac{1}{6}(q^2+\xi q+4)$	$\frac{1}{2}(q^2-\xi q)$	$\frac{1}{3}(q^2+\xi q-2)$
	$\frac{1}{6}(q^3-q)$	r_{3j}	$\frac{1}{2}(q^2-q)$	$\frac{1}{6}(q^2-3q+2)$	$\frac{1}{6}(q^2+\xi q+4)$	$\frac{1}{6}(q^2-\xi q)$	$\frac{1}{6}(q^2+\xi q-2)$
$\mathcal{N}_4$	$1_{\mathcal{C}} \setminus \Gamma$-planes	k_{4j}	1	q	$\frac{1}{6}(q^2-\xi q)$	$\frac{1}{2}(q^2+\xi q)$	$\frac{1}{3}(q^2-\xi q)$
	$\frac{1}{2}(q^3-q)$	r_{4j}	$\frac{1}{2}(q^2-q)$	$\frac{1}{2}(q^2-q)$	$\frac{1}{2}(q^2-\xi q)$	$\frac{1}{2}(q^2+\xi q)$	$\frac{1}{2}(q^2-\xi q)$
$\mathcal{N}_5$	$0_{\mathcal{C}}$-planes	k_{5j}	0	$q+1$	$\frac{1}{6}(q^2+\xi q-2)$	$\frac{1}{2}(q^2-\xi q)$	$\frac{1}{3}(q^2+\xi q+1)$
	$\frac{1}{3}(q^3-q)$	r_{5j}	0	$\frac{1}{3}(q^2-1)$	$\frac{1}{3}(q^2+\xi q-2)$	$\frac{1}{3}(q^2-\xi q)$	$\frac{1}{3}(q^2+\xi q+1)$

Többszörösen telítő halmazok

Definíció

Egy $S \subseteq PG(N,q)$ halmazt (ρ,μ)-telítőnek nevezünk, ha

- *létezik olyan $Q \in PG(N,q)$ pont, amely nincs benne egyik S pontjai által generált $(\rho-1)$-dimenziós altérben sem, valamint*
- *minden az előbbi tulajdonsággal rendelkező Q pont legalább μ olyan ρ-dimenziós altérben benne van, amit S pontjai generálnak.*

n-elemű (ρ,μ)-telítő halmaz $PG(k-1,q)$-ban $\leftrightarrow$ lineáris $[n,n-k]_q$-kód, ami $(\rho+1,\mu)$-MCF

Többszörösen telítő halmazok

Definíció

Egy $S \subseteq PG(N,q)$ halmazt (ρ,μ)-telítőnek nevezünk, ha

- *létezik olyan $Q \in PG(N,q)$ pont, amely nincs benne egyik S pontjai által generált $(\rho-1)$-dimenziós altérben sem, valamint*
- *minden az előbbi tulajdonsággal rendelkező Q pont legalább μ olyan ρ-dimenziós altérben benne van, amit S pontjai generálnak.*

n-elemű (ρ,μ)-telítő halmaz $PG(k-1,q)$-ban $\leftrightarrow$ lineáris $[n,n-k]_q$-kód, ami $(\rho+1,\mu)$-MCF

MCF-kódok

Definíció

Egy $[n,k]_q$ *lineáris kód* $(\rho+1,\mu)$*-MCF (multiple covering of the farthest-off points), ha fedési sugara* $\rho+1$*, és minden* $x \in GF(q)^n$*-hez, amire* $d(x,C)=\rho+1$*, azon* c *kódszavak száma, amire* $d(x,c)=\rho+1$*, legalább* μ*.*

Többszörösen telítő halmazok

Tétel (Bartoli, Davydov, Marcugini, Pambianco, 2020)

$PG(3,q)$-ban a momentumgörbe egy $q+1$ elemű minimális $(2,\mu)$-telítő halmaz, ahol

$$\mu = \begin{cases} \frac{q^2-3q}{6} & \textit{ha} \quad q \equiv 0 \mod 3, \\ \frac{q^2-3q+2}{6} & \textit{ha} \quad q \not\equiv 0 \mod 3. \end{cases}$$

Továbbá a $PG(3,q)$ terekben a momentumgörbék egy aszimptotikusan optimális többszörösen telítő halmazsorozatot adnak meg.

Többszörösen telítő halmazok

Tétel (Bartoli, Davydov, Marcugini, Pambianco, 2020)

$PG(3,q)$-ban a momentumgörbe egy $q+1$ elemű minimális $(2,\mu)$-telítő halmaz, ahol

$$\mu = \begin{cases} \frac{q^2-3q}{6} & \textit{ha} \quad q \equiv 0 \mod 3, \\ \frac{q^2-3q+2}{6} & \textit{ha} \quad q \not\equiv 0 \mod 3. \end{cases}$$

Továbbá a $PG(3,q)$ terekben a momentumgörbék egy aszimptotikusan optimális többszörösen telítő halmazsorozatot adnak meg.

μ-sűrűség

Definíció

Legyen S egy (ρ, μ)-telítő halmaz. S-nek a μ-sűrűsége az a $\gamma_\mu(S, \rho)$ érték, amit úgy kapunk, hogy annak az átlagos értékét, hogy az S által generált $(\rho - 1)$-dimenziós alterekből kimaradó pontokon át hány S által generált ρ-dimenziós altér megy, elosztjuk μ-vel.

- legalább 1, és egyenlőség $\Leftrightarrow$ minden S által generált $(\rho - 1)$-dimenziós alterek által le nem fedett pontot pontosan μ S által generált ρ-dimenziós altér tartalmaz (optimális)

μ-sűrűség

Definíció

Legyen S egy (ρ, μ)-telítő halmaz. S-nek a μ-sűrűsége az a $\gamma_\mu(S, \rho)$ érték, amit úgy kapunk, hogy annak az átlagos értékét, hogy az S által generált $(\rho - 1)$-dimenziós alterekből kimaradó pontokon át hány S által generált ρ-dimenziós altér megy, elosztjuk μ-vel.

- legalább 1, és egyenlőség $\Leftrightarrow$ minden S által generált $(\rho - 1)$-dimenziós alterek által le nem fedett pontot pontosan μ S által generált ρ-dimenziós altér tartalmaz (optimális)

Új eredmények

Állítás

Legyen $k \in \mathbb{Z}^+$. *Legyen* $\mathcal{P}_i$ $V_i = PG(n_i, q)$*-ban egy* (ρ_i, μ_i)*-telítő halmaz,* $i = 1, \dots, k$. *Vegyük fel ezeket* $PG(n_1 + n_2 + \dots + n_k + k - 1, q)$*-ban kitérő módon. Ekkor* $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots \cup \mathcal{P}_k$ *egy* (ρ, μ)*-telítő halmaz, ahol*

$$\rho = \left(\sum_{i=1}^{k} \rho_i \right) + k - 1 \text{ és } \mu = \prod_{i=1}^{k} \mu_i .$$

Továbbá ha mindegyik $\mathcal{P}_i$ *minimális, akkor* $\mathcal{P}$ *is az.*

Bizonyítás

- $k = 2$: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ egy $(\rho_1 + \rho_2 + 1, \mu_1\mu_2)$-telítő halmaz
  - $P \in V_1$ vagy $P \in V_2 \Rightarrow P$ benne van $(\rho_1 + \rho_2)$-dimenziós altérben
  - egyikben sincs benne $\Rightarrow \exists!$ P-n át egy e egyenes: $V_1 \cap e = \{M_1\}$, $V_2 \cap e = \{M_2\}$
  - P nincs benne $(\rho_1 + \rho_2)$-dimenziós altérben $\Leftrightarrow$ M_1 nincs benne ρ_1-dimenziósban és M_2 nincs benne ρ_2-dimenziósban
  - ekkor M_1-en át μ_1, M_2-n át μ_2 darab ρ_1-, illetve ρ_2-dimenziós altér megy; ezek összesen $\mu_1\mu_2$ darab $(\rho_1 + \rho_2 + 1)$-dimenziósat generálnak
- tetszőleges k-ra: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_k = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{k-1}) \cup \mathcal{P}_k$ indukció

Bizonyítás

- $k = 2$: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ egy $(\rho_1 + \rho_2 + 1, \mu_1\mu_2)$-telítő halmaz
  - $P \in V_1$ vagy $P \in V_2 \Rightarrow P$ benne van $(\rho_1 + \rho_2)$-dimenziós altérben
  - egyikben sincs benne $\Rightarrow \exists!$ P-n át egy e egyenes: $V_1 \cap e = \{M_1\}$, $V_2 \cap e = \{M_2\}$
  - P nincs benne $(\rho_1 + \rho_2)$-dimenziós altérben $\Leftrightarrow$ M_1 nincs benne ρ_1-dimenziósban és M_2 nincs benne ρ_2-dimenziósban
  - ekkor M_1-en át μ_1, M_2-n át μ_2 darab ρ_1-, illetve ρ_2-dimenziós altér megy; ezek összesen $\mu_1\mu_2$ darab $(\rho_1 + \rho_2 + 1)$-dimenziósat generálnak
- tetszőleges k-ra: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots \cup \mathcal{P}_k = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots \cup \mathcal{P}_{k-1}) \cup \mathcal{P}_k$ indukció

Bizonyítás

- $k = 2$: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ egy $(\rho_1 + \rho_2 + 1, \mu_1\mu_2)$-telítő halmaz
  - $P \in V_1$ vagy $P \in V_2 \Rightarrow P$ benne van $(\rho_1 + \rho_2)$-dimenziós altérben
  - egyikben sincs benne $\Rightarrow \exists!$ P-n át egy e egyenes: $V_1 \cap e = \{M_1\}$, $V_2 \cap e = \{M_2\}$
  - P nincs benne $(\rho_1 + \rho_2)$-dimenziós altérben $\Leftrightarrow M_1$ nincs benne ρ_1-dimenziósban és M_2 nincs benne ρ_2-dimenziósban
  - ekkor M_1-en át μ_1, M_2-n át μ_2 darab ρ_1-, illetve ρ_2-dimenziós altér megy; ezek összesen $\mu_1\mu_2$ darab $(\rho_1 + \rho_2 + 1)$-dimenziósat generálnak
- tetszőleges k-ra: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_k = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{k-1}) \cup \mathcal{P}_k$ indukció

Bizonyítás

- $k=2$: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ egy $(\rho_1+\rho_2+1, \mu_1\mu_2)$-telítő halmaz
  - $P \in V_1$ vagy $P \in V_2 \Rightarrow P$ benne van $(\rho_1+\rho_2)$-dimenziós altérben
  - egyikben sincs benne $\Rightarrow \exists!$ P-n át egy e egyenes: $V_1 \cap e = \{M_1\}$, $V_2 \cap e = \{M_2\}$
  - P nincs benne $(\rho_1+\rho_2)$-dimenziós altérben $\Leftrightarrow$ M_1 nincs benne ρ_1-dimenziósban és M_2 nincs benne ρ_2-dimenziósban
  - ekkor M_1-en át μ_1, M_2-n át μ_2 darab ρ_1-, illetve ρ_2-dimenziós altér megy; ezek összesen $\mu_1\mu_2$ darab $(\rho_1+\rho_2+1)$-dimenziósat generálnak
- tetszőleges k-ra: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_k = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{k-1}) \cup \mathcal{P}_k$ indukció

Bizonyítás

- $k=2$: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ egy $(\rho_1+\rho_2+1, \mu_1\mu_2)$-telítő halmaz
  - $P \in V_1$ vagy $P \in V_2 \Rightarrow P$ benne van $(\rho_1+\rho_2)$-dimenziós altérben
  - egyikben sincs benne $\Rightarrow \exists!$ P-n át egy e egyenes: $V_1 \cap e = \{M_1\}$, $V_2 \cap e = \{M_2\}$
  - P nincs benne $(\rho_1+\rho_2)$-dimenziós altérben $\Leftrightarrow M_1$ nincs benne ρ_1-dimenziósban és M_2 nincs benne ρ_2-dimenziósban
  - ekkor M_1-en át μ_1, M_2-n át μ_2 darab ρ_1-, illetve ρ_2-dimenziós altér megy; ezek összesen $\mu_1\mu_2$ darab $(\rho_1+\rho_2+1)$-dimenziósat generálnak
- tetszőleges k-ra: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_k = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{k-1}) \cup \mathcal{P}_k$ indukció

Bizonyítás

- $k = 2$: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ egy $(\rho_1 + \rho_2 + 1, \mu_1\mu_2)$-telítő halmaz
  - $P \in V_1$ vagy $P \in V_2 \Rightarrow P$ benne van $(\rho_1 + \rho_2)$-dimenziós altérben
  - egyikben sincs benne $\Rightarrow \exists!$ P-n át egy e egyenes: $V_1 \cap e = \{M_1\}$, $V_2 \cap e = \{M_2\}$
  - P nincs benne $(\rho_1 + \rho_2)$-dimenziós altérben $\Leftrightarrow$ M_1 nincs benne ρ_1-dimenziósban és M_2 nincs benne ρ_2-dimenziósban
  - ekkor M_1-en át μ_1, M_2-n át μ_2 darab ρ_1-, illetve ρ_2-dimenziós altér megy; ezek összesen $\mu_1\mu_2$ darab $(\rho_1 + \rho_2 + 1)$-dimenziósat generálnak
- tetszőleges k-ra: $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_k = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{k-1}) \cup \mathcal{P}_k$ indukció

Új eredmények

Állítás

$\gamma_\mu(\mathcal{P}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_k, \rho) = \prod_{i=1}^k \gamma_{\mu_i}(\mathcal{P}_i, \rho_i)$.

- $k = 2$-re:
  - Tegyük fel, hogy V_1-ben A_1 db ponton át N_1, A_2-n át $N_2, \ldots, A_r$-en át N_r db ρ_1-dimenziós altér, V_2-ben pedig B_1-en át $M_1, \ldots$ B_s-en át M_s db ρ_2-dimenziós altér megy
  - $\gamma_{\mu_1}(\mathcal{P}_1, \rho_1) = \frac{1}{\mu_1} \frac{\sum_{i=1}^r A_i N_i}{\sum_{i=1}^r A_i}$
  - $\gamma_{\mu_2}(\mathcal{P}_2, \rho_2) = \frac{1}{\mu_2} \frac{\sum_{j=1}^s B_j M_j}{\sum_{j=1}^s B_j}$
  - $\gamma_\mu(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, \rho) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \frac{\sum_{i,j} A_i B_j (q-1) N_i M_j}{\sum_{i,j} A_i B_j (q-1)}$
- indukció

Új eredmények

Állítás

$\gamma_\mu(\mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_k, \rho) = \prod_{i=1}^k \gamma_{\mu_i}(\mathcal{P}_i, \rho_i)$.

- $k = 2$-re:
  - Tegyük fel, hogy V_1-ben A_1 db ponton át N_1, A_2-n át $N_2, \dots, A_r$-en át N_r db ρ_1-dimenziós altér, V_2-ben pedig B_1-en át $M_1, \dots$ B_s-en át M_s db ρ_2-dimenziós altér megy
  - $\gamma_{\mu_1}(\mathcal{P}_1, \rho_1) = \frac{1}{\mu_1} \frac{\sum_{i=1}^r A_i N_i}{\sum_{i=1}^r A_i}$
  - $\gamma_{\mu_2}(\mathcal{P}_2, \rho_2) = \frac{1}{\mu_2} \frac{\sum_{j=1}^s B_j M_j}{\sum_{j=1}^s B_j}$
  - $\gamma_\mu(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, \rho) = \frac{1}{\mu_1\mu_2} \frac{\sum_{i,j} A_i B_j (q-1) N_i M_j}{\sum_{i,j} A_i B_j (q-1)}$
- indukció

Új eredmények

Állítás

$\gamma_\mu(\mathcal{P}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_k, \rho) = \prod_{i=1}^k \gamma_{\mu_i}(\mathcal{P}_i, \rho_i)$.

- $k = 2$*-re:*
  - *Tegyük fel, hogy* V_1*-ben* A_1 *db ponton át* N_1*,* A_2*-n át* $N_2, \ldots, A_r$*-en át* N_r *db* ρ_1*-dimenziós altér,* V_2*-ben pedig* B_1*-en át* M_1*, …* B_s*-en át* M_s *db* ρ_2*-dimenziós altér megy*
  - $\gamma_{\mu_1}(\mathcal{P}_1, \rho_1) = \frac{1}{\mu_1} \frac{\sum_{i=1}^r A_i N_i}{\sum_{i=1}^r A_i}$
  - $\gamma_{\mu_2}(\mathcal{P}_2, \rho_2) = \frac{1}{\mu_2} \frac{\sum_{j=1}^s B_j M_j}{\sum_{j=1}^s B_j}$
  - $\gamma_\mu(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, \rho) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \frac{\sum_{i,j} A_i B_j (q-1) N_i M_j}{\sum_{i,j} A_i B_j (q-1)}$
- *indukció*

Új eredmények

Állítás

$\gamma_\mu(\mathcal{P}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_k, \rho) = \prod_{i=1}^k \gamma_{\mu_i}(\mathcal{P}_i, \rho_i)$.

- $k = 2$*-re:*
  - *Tegyük fel, hogy* V_1*-ben* A_1 *db ponton át* N_1*,* A_2*-n át* $N_2, \ldots, A_r$*-en át* N_r *db* ρ_1*-dimenziós altér,* V_2*-ben pedig* B_1*-en át* M_1*, …* B_s*-en át* M_s *db* ρ_2*-dimenziós altér megy*
  - $\gamma_{\mu_1}(\mathcal{P}_1, \rho_1) = \frac{1}{\mu_1} \frac{\sum_{i=1}^r A_i N_i}{\sum_{i=1}^r A_i}$
  - $\gamma_{\mu_2}(\mathcal{P}_2, \rho_2) = \frac{1}{\mu_2} \frac{\sum_{j=1}^s B_j M_j}{\sum_{j=1}^s B_j}$
  - $\gamma_\mu(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, \rho) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \frac{\sum_{i,j} A_i B_j (q-1) N_i M_j}{\sum_{i,j} A_i B_j (q-1)}$
- *indukció*

Új eredmények

Állítás

$\gamma_\mu(\mathcal{P}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_k, \rho) = \prod_{i=1}^k \gamma_{\mu_i}(\mathcal{P}_i, \rho_i)$.

- $k = 2$*-re:*
  - *Tegyük fel, hogy* V_1*-ben* A_1 *db ponton át* N_1*,* A_2*-n át* $N_2, \ldots, A_r$*-en át* N_r *db* ρ_1*-dimenziós altér,* V_2*-ben pedig* B_1*-en át* M_1*, …* B_s*-en át* M_s *db* ρ_2*-dimenziós altér megy*
  - $\gamma_{\mu_1}(\mathcal{P}_1, \rho_1) = \frac{1}{\mu_1} \frac{\sum_{i=1}^r A_i N_i}{\sum_{i=1}^r A_i}$
  - $\gamma_{\mu_2}(\mathcal{P}_2, \rho_2) = \frac{1}{\mu_2} \frac{\sum_{j=1}^s B_j M_j}{\sum_{j=1}^s B_j}$
  - $\gamma_\mu(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2, \rho) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \frac{\sum_{i,j} A_i B_j (q-1) N_i M_j}{\sum_{i,j} A_i B_j (q-1)}$
- *indukció*

Új eredmények

Következmény

Legyen $k \in \mathbb{Z}^+$. Vegyünk fel $PG(4k-1, q)$-ban k darab 3-dimenziós alteret kitérő módon, legyenek ezek $V_1, \ldots, V_k$. Vegyünk mindegyik V_i-ben egy $\mathcal{C}_i$ momentumgörbét. Ekkor $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k$ egy $k(q+1)$ elemű minimális $(3k-1, \mu^k)$-telítő halmaz, ahol

$$\mu = \begin{cases} \frac{q^2-3q}{6}, & \textit{ha} \quad q \equiv 0 \mod 3, \\ \frac{q^2-3q+2}{6}, & \textit{ha} \quad q \not\equiv 0 \mod 3. \end{cases}$$

Továbbá $\mathcal{C}$ aszimptotikusan optimális.

Köszönöm a figyelmet!