

ÉLSZÍNEZÉSI KÉRDÉSEK A HIPERKOCKÁN

Szabó Blanka

Egyéni kutatómunka 2

Témavezető: Damásdi Gábor

1. Bevezetés

Az előző félévben Norine hiperkocka sejtésével foglalkoztunk, ebben a félévben pedig további élszínezési kérdéseket vizsgáltunk a hiperkockán, az elért, új részeredmény a 3. fejezetben található.

2. Norine hiperkocka sejtése és változatai

Az n dimenziós hiperkocka élgráfjára gondolhatunk a következőképpen: a hiperkocka csúcsait megfeleltethetjük a $\{0,1\}^n$ vektoroknak, és pontosan akkor vezet két csúcson között él, ha pontosan 1 koordinátában különböznek. Két csúcson *antipodális*, ha minden koordinátában különböznek. Az ab és cd él *antipodális*, ha a és c , valamint b és d antipodális. Egy színezés *antipodális*, ha minden élre teljesül, hogy az adott él és az antipodálisa különböző színű. Egy ab út *geodetikus*, ha legrövidebb az összes út között, amelyek két végpontja a és b .

Norine 2008-ban fogalmazta meg következő sejtését:

2.1. Sejtés. *Az n dimenziós hiperkocka éleinek bármely antipodális, 2 színnel való színezésében létezik egyszínű út két antipodális csúcson között.*

Tetszőleges színezés esetén megfogalmazható a következő sejtés:

2.2. Sejtés. *Az n dimenziós hiperkocka éleinek bármely, 2 színnel való színezésében van két antipodális csúcson, amelyek között létezik olyan út, amely legfeljebb egyszer vált színt.*

Ha megköveteljük azt is, hogy az út legyen geodetikus, akkor a következő sejtéseket kapjuk:

2.3. Sejtés. *Az n dimenziós hiperkocka éleinek bármely antipodális, 2 színnel való színezésében létezik egyszínű geodetikus út két antipodális csúcson között.*

2.4. Sejtés. *Az n dimenziós hiperkocka éleinek bármely, 2 színnel való színezésében van két antipodális csúcson, amelyek között létezik olyan geodetikus út, amely legfeljebb egyszer vált színt.*

A 2.3 sejtés és a 2.4 sejtés ekvivalenciáját Leader és Long bizonyította be.[5] Nyilvánvaló, hogy a 2.3 sejtésből következik a 2.1 sejtés, valamint a 2.4 sejtésből következik a 2.2 sejtés. Tehát a 2.3 sejtésből következik a többi három sejtés is.

2.1. Ismert eredmények

A geodetikus Norine 2.3 sejtést alacsonyabb dimenzióra, $n \leq 5$ esetén 2013-ban Feder és Subi bizonyította be[3], eggyel magasabb dimenzóra 2017-ben West és Wise bizonyította be[4]. Az első félévben ezeket és a következő cikket dolgoztam fel, melyben a 2.3 sejtést $n = 7$ esetén SAT solver használatával bizonyították be[1].

Az első félév során a 2.3 sejtést az $n=8$ esetben terveztük igazolni SAT solver használatával, egy, az előző cikkben szereplőnél jobb szimmetriatörést alkalmazva, viszont 2025 novemberében jelent meg egy cikk[2], amelyben ezt a szimmetriatörést alkalmazzák. A cikk ezenkívül tartalmazza a jelenlegi legjobb eredményt a színváltások számának aszimptotikus közelítésére vonatkozóan:

2.1. Tétel. *Az n dimenziós hiperkocka éleinek bármely, 2 színnel való színezésében van két antipodális csúcs, amelyek között létezik olyan út, amely legfeljebb $0.3125n+6$ alkalommal vált színt.*

3. Egyszínű C_4 -mentes színezések

A félév során a következő Ramsey típusú probléma egy részesetét sikerült belátnunk: Milyen G és H esetén teljesül, hogy a G -nek létezik olyan színezése, amely nem tartalmaz egyszínű H -t? Azt a kérdéskört, amikor G egy hatványgráf és $H = C_4$, nemrég kezdték el vizsgálni.[6]

3.1. Definíció. *A $G_1 = (V_1, E_1)$ és a $G_2 = (V_2, E_2)$ gráfszorzatán azt a $G = (V, E)$ gráfot értjük, amelynek csúcsai $V = \{(v, w) : v \in V_1, w \in V_2\}$, illetve minden (v_1, w_1) és (v_2, w_2) csúcs pontosan akkor van összekötve, ha $v_1 = v_2$, valamint w_1 és w_2 szomszédos G_2 -ben, vagy ha $w_1 = w_2$, valamint v_1 és v_2 szomszédos G_1 -ben.*

Jelölés: $G = G_1 \square G_2$, az n . hatvány pedig $\square^n G$.

3.2. Definíció. *$G \not\rightarrow H$ azt jelenti, hogy létezik G -nek olyan színezése, amely nem tartalmaz egyszínű H -t.*

3.3. Tétel. $\square^n K_4 \not\rightarrow C_4$

Az általános problémának ezt a részesetét úgy bizonyítottuk be, hogy $\square^n K_4$ helyett egy fedőgráfjának, a Q_{3n} -nek a színezésére vezettük át a problémát.

3.4. Definíció. *A $G_2 = (V_2, E_2)$ gráf a $G_1 = (V_1, E_1)$ gráf egy fedőgráfja, ha létezik egy olyan $f : V_2 \rightarrow V_1$ szürjektív leképezés, amelyre teljesül a lokális izomorfizmus, vagyis $\forall v \in V_2$ esetén f megszorítása v szomszédjaira bijekció v és $f(v)$ szomszédjai között.*

Ha G_2 egy fedőgráfja G_1 -nek és G_4 egy fedőgráfja G_3 -nak, akkor $G_2 \square G_4$ egy fedőgráfja $G_1 \square G_3$ -nak. Ezt alkalmazva Q_3 , K_4 és hatványaik esetén, mivel Q_3 kanonikus páros fedése K_4 -nek, megkapjuk, hogy $\square^n Q_3$ egy fedőgráfja $\square^n K_4$ -nek. Ez a fedőgráf, vagyis Q_{3n} egy könnyebben kezelhető, szebb konstrukció. Nézzük meg az egyszínű C_4 létezésének kapcsolatát Q_{3n} és $\square^n K_4$ esetén. Felhasználva, hogy Q_3 kanonikus páros fedése K_4 -nek, nem nehéz belátni, hogy ha Q_{3n} -ben nincs egyszínű C_4 , akkor $\square^n K_4$ -ben sincs. Ezek alapján elég megnézni, hogy a Q_{3n} színezésére minek kell teljesülnie ahhoz, hogy a színezésből a $\square^n K_4$ egy színezését kapjuk.

Két szomszédos, $3n$ dimenziós csúcs 1 koordinátában különbözik, ez legyen az őket összekötő él változó bitje. Így minden él megfeleltethető egy olyan $3n$ hosszú 0-1 sorozatnak, amely egy változó bitet tartalmaz. Ezek a sorozatok n darab, egymást követő hármas blokkokból állnak. Ha megváltoztatjuk egy hármas blokk minden elemét úgy, hogy 0 helyett 1-et, 1 helyett 0-t írunk, akkor az eredeti blokk komplementerét kapjuk meg.

A $\square^n K_4$ -ben szereplő éleknek a fedés által több élt feleltetünk meg a Q_{3n} -ben, pontosan azokat az éleket, amelyek az eredeti élből úgy kaphatóak meg, hogy az adott él esetén az összes lehetséges módon vesszük minden blokk esetén az eredeti blokkot vagy a komplementerét. Egy $\square^n K_4$ -beli él esetén ez összesen 2^n élt jelent Q_{3n} -ben, ezeknek az eredeti élt fedő éleknek azonos színűnek kell lenni. Ahhoz, hogy a Q_{3n} színezéséből a $\square^n K_4$ egy színezését kapjuk ennek kell teljesülnie.

3.5. Tétel. *A Q_{3n} eleinek létezik olyan 2 színnel való színezése, amely nem tartalmaz egyszínű C_4 -et és $\square^n K_4$ minden éle esetén az élt fedő, Q_{3n} -beli élek azonos színűek.*

Bizonyítás. A színezést minden él esetén a következőképpen meghatározott elemekből álló összeg határozza meg. Legyen az adott él változó bitje az i . blokkban.

Ha a változó bit a blokk 1. eleme, akkor a következő biteket adjuk össze: az i . blokkból a 2. és a 3. bitet, az összes többi blokkból pedig az 1. és a 3. bitet.

Ha a változó bit a blokk 2. eleme, akkor a következő biteket adjuk össze: az i . blokkból az 1. és a 3. bitet, az összes többi blokkból pedig az 1. és a 2. bitet.

Ha a változó bit a blokk 3. eleme, akkor a következő biteket adjuk össze: az i . blokkból az 1. és a 2. bitet, az összes többi blokkból pedig a 2. és a 3. bitet.

Tehát, ha a változó bit a blokk j . eleme, akkor az i . blokkból a $((j-1) \bmod 3)$. és a $((j+1) \bmod 3)$. bitet, az összes többi blokkból pedig a j . és a $((j+2) \bmod 3)$. bitet adjuk össze.

Ha ez az összeg $0 \bmod 2$, akkor legyen az él piros, ha 1, akkor kék színű.

Ebben a színezésben $\square^n K_4$ minden éle esetén az élt fedő, Q_{3n} -beli élek azonos színűek lesznek, hiszen minden blokkból kettő biteket adunk hozzá az összeghez, így egy blokk helyett a komplementerét véve az összeg $\bmod 2$ mindig változatlan marad.

Ez a színezés nem tartalmaz egyszínű C_4 -et:

Minden C_4 -et két bit (i . és j .) változása meghatároz, hiszen a négy él felírása a következő: az i . bit a változó bit és a j . bit 0, az i . bit a változó bit és a j . bit 1, az i . bit 0 és a j . bit a változó bit, valamint az i . bit 1 és a j . bit a változó bit, a többi bit

pedig változatlan marad. Mivel a változó bit nem szerepel az összegben és a másik bit 0 és 1 értéket is felvesz a C_4 -ben, ez két különböző összeget eredményez mod 2, vagyis lesz két ellentétes színű éle az adott C_4 -nek.

Tehát elég azt belátni, hogy minden i és j esetén, ha az i . bit a változó bit, akkor a j . bit szerepel az összegben vagy fordítva, ha a j . bit a változó bit, akkor az i . bit szerepel az összegben. Ha a két bit egy blokkban szerepel, akkor ez nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy különböző blokkban vannak. Ha a változó bit az i . elem, akkor $j=i$ és $j=i+2 \pmod 3$ esetén az összeg tartalmazza a j . bitet. Ha $j=i+1 \pmod 3$, akkor pedig nézzük meg azt az összeget, amikor a j . bit a változó bit. Ez tartalmazza az i . bitet, hiszen $i=j-1 \pmod 3$.

Tehát a megadott színezésre teljesül, hogy $\square^n K_4$ minden éle esetén az élt fedő, Q_{3n} -beli élek azonos színűek és nem tartalmaz egyszínű C_4 -et. \square

Tehát $\square^n K_4$ -nek létezik olyan színezése, amely nem tartalmaz egyszínű C_4 -t, viszont $\square^n K_6$ összes színezése tartalmaz egyszínű C_4 -t, hiszen már K_6 esetén is tartalmaz minden színezés egyszínű C_4 -t. A probléma $\square^n K_5$ esetén megoldatlan, a továbbiakban ezt tervezzük vizsgálni.

Hivatkozások

- [1] Keith Frankston and Danny Scheinerman: Proving Norine’s conjecture holds for $n=7$ via SAT solvers, 2024. <https://arxiv.org/abs/2408.02474>
- [2] Markus Kirchweger, Tomas Peitl, Bernardo Subercasaux and Stefan Szeider: From the finite to the infinite: Sharper asymptotic bounds on Norin’s conjecture via SAT, 2025. <https://arxiv.org/abs/2511.08386>
- [3] Tomás Feder and Carlos Subi: On hypercube labellings and antipodal monochromatic paths, <https://theory.stanford.edu>
- [4] Douglas B. West and Jennifer I. Wise: Antipodal edge-colorings of hypercubes, 2017. <https://dwest.web.illinois.edu/pubs/antip.pdf>
- [5] Imre Leader and Eoin Long: Long geodesics in subgraphs of the cube 2013. <https://arxiv.org/abs/1301.2195v1>
- [6] Gábor Damásdi, Anna Geisler, Ander Lamaison and Victor Souza: personal communication, 2026.