

Élszínezési kérdések a hiperkockán

Szabó Blanka

Témavezető: Damásdi Gábor

Ramsey típusú probléma

Milyen G és H esetén teljesül, hogy a G -nek létezik olyan színezése, amely nem tartalmaz egyszínű H -t?

Definíció

$G \not\rightarrow H$ azt jelenti, hogy létezik G -nek olyan színezése, amely nem tartalmaz egyszínű H -t.

Részeset: $G = \square^n K_4$ és $H = C_4$

Gráfszorzat

Definíció

A $G_1 = (V_1, E_1)$ és a $G_2 = (V_2, E_2)$ gráfszorzatán azt a $G = (V, E)$ gráfot értjük, amelynek csúcsai $V = \{(v, w) : v \in V_1, w \in V_2\}$, illetve minden (v_1, w_1) és (v_2, w_2) csúcs pontosan akkor van összekötve, ha $v_1 = v_2$, valamint w_1 és w_2 szomszédos G_2 -ben, vagy ha $w_1 = w_2$, valamint v_1 és v_2 szomszédos G_1 -ben.

Jelölés: $G = G_1 \square G_2$, az n . hatvány pedig $\square^n G$.

Fedések

Definíció

A $G_2 = (V_2, E_2)$ gráf a $G_1 = (V_1, E_1)$ gráf egy fedőgráfja, ha létezik egy olyan $f : V_2 \rightarrow V_1$ szürjektív leképezés, amelyre teljesül a lokális izomorfizmus, vagyis $\forall v \in V_2$ esetén f megszorítása v szomszédjaira bijekció v és $f(v)$ szomszédjai között.

Állítás

Ha G_2 egy fedőgráfja G_1 -nek és G_4 egy fedőgráfja G_3 -nak, akkor $G_2 \square G_4$ egy fedőgráfja $G_1 \square G_3$ -nak.

Kanonikus páros fedés

Definíció

A $G_1 = (V_1, E_1)$ gráf kanonikus páros fedése az a $G_2 = (V_2, E_2)$ gráf, amelynek csúcsai $V_2 = \{(v, i) : v \in V_1, i \in \{1, 2\}\}$, illetve minden $(v_i, 1)$ és $(v_j, 2)$ csúcs pontosan akkor van összekötve, ha v_i és v_j szomszédos G_1 -ben.

Állítás

Q_3 kanonikus páros fedése K_4 -nek.

Tétel

$$\square^n K_4 \not\rightarrow C_4$$

Állítás

Q_{3n} egy fedőgráfja $\square^n K_4$ -nek.

Tétel

A Q_{3n} éleinek létezik olyan 2 színnel való színezése, amely nem tartalmaz egyszínű C_4 -et és $\square^n K_4$ minden éle esetén az élt fedő, Q_{3n} -beli élek azonos színűek.

Fedő élek

- Minden él megfeleltethető egy olyan $3n$ hosszú 0-1 sorozatnak, amely egy változó bitet tartalmaz.
- Ezek a sorozatok n darab, egymást követő hármás blokkokból állnak. Ha megváltoztatjuk egy hármás blokk minden elemét úgy, hogy 0 helyett 1-et, 1 helyett 0-t írunk, akkor az eredeti blokk komplementerét kapjuk meg.
- A $\square^n K_4$ egy élének fedő élei azok az élek, amelyek az eredeti élből úgy kaphatóak meg, hogy az adott él esetén az összes lehetséges módon vesszük minden blokk esetén az eredeti blokkot vagy a komplementerét.

Színezés

- Ha a változó bit az i . blokk j . eleme, akkor az i . blokkból a $((j - 1) \bmod 3)$. és a $((j + 1) \bmod 3)$. bitet, az összes többi blokkból pedig a j . és a $((j + 2) \bmod 3)$. bitet adjuk össze.
- Ha ez az összeg $0 \bmod 2$, akkor legyen az él piros, ha 1, akkor kék színű.
- $\square^n K_4$ minden éle esetén az élt fedő, Q_{3n} -beli élek azonos színűek.
- A színezés C_4 -mentes.

C_4 -mentesség

Minden C_4 -et két bit (i . és j .) változása meghatároz.
Ha a két bit egy blokkban szerepel, akkor a C_4 -mentesség nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy különböző blokkban vannak:

- $j = i \bmod 3$: az összeg tartalmazza a j . bitet
- $j = i + 2 \bmod 3$: az összeg tartalmazza a j . bitet
- $j = i + 1 \bmod 3$: nézzük meg azt az összeget, amikor a j . bit a változó bit. Ez tartalmazza az i . bitet, hiszen $i = j - 1 \bmod 3$.

Eddigi eredmények

- $\square^n K_4 \not\rightarrow C_4$
- $\square^n K_5 \stackrel{?}{\rightarrow} C_4$
- $\square^n K_6 \rightarrow C_4$

Köszönöm a figyelmet!