Idempotens osztógyűrűk-második felvonás

Metzger Ábris

Témavezető:

Dr. Ágoston István

2026. május

1. Bevezetés

A korábbi kutatómunka során az idempotens osztógyűrűket vizsgáltuk, ezen gyűrűosztályról mondtunk ki különféle állításokat. A továbbiakban megválaszolunk pár nyitva maradt kérdést, illetve pár moduluselméleti kérdést. De először is idézzük fel az idempotens osztógyűrűk definícióját. A beszámoló során továbbra is feltesszük, hogy a gyűrűk egységelemesek (kivéve ott, ahol ez nyilvánvalóan nem teljesül), illetve modulus alatt bal modulust értünk. A [2] cikkben fellelhető a rendkívül hasonló Zorn-gyűrűk osztálya. A [6], [5] cikkekben foglalkoznak nagyon hasonló kérdésekkel a Zorn-gyűrűkkel, illetve az úgynevezett I-gyűrűkkel kapcsolatban. Illetve a moduluselméleti kérdéseinket a [3] cikk állításai ihlették. Továbbá néhol használjuk az előző kutatómunkánkban [4] leírtakat. Megemlítendő az [1] könyv, hiszen ebben tárgyalják a tulajdonság ihletéül szolgáló Neumann-regularitást.

1. Definíció. *Egy R gyűrű jobb (bal) idempotens osztógyűrű, ha $\forall \quad 0 \neq x \in R \quad \exists y \in R$, hogy $0 \neq xy = (xy)^2$ (illetve $0 \neq yx = (yx)^2$).*

Mint ahogy azt [4] leírtuk, a definíció jobb-bal szimmetrikus, sőt elég megkövetelni, hogy két oldalról szorozható minden nem 0 elem idempotensbe.

2. Néhány felmerülő kérdés megválaszolása

Először is meg kell említenünk, hogy az Idempotens osztógyűrűk című kutatómunkában szerepel egy hiba, méghozzá az az állítás, hogy az idempotens osztógyűrűk osztálya zárt a faktorképzésre. Erre a következő ellenpéldát mutatjuk (amit már az korábbi előadáson megadtunk):

2. Definíció. *Legyen* $T(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) = \{x \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q} \mid \exists a \in \mathbb{Z}$, *hogy* $x_i = a$ *véges sok kivételével* $\}$

Továbbá legyen $\varphi : T(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ *leképezés, amely egy* $T(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$*-beli elemhez a végtelen sokszor szereplő rögzített egészt rendeli.*

3. Állítás. *A fent definiált* $T(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ *gyűrű idempotens osztógyűrű, és a* φ *leképezés magja szerinti faktor nem idempotens osztógyűrű.*

Bizonyítás. Az, hogy $T(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ idempotens osztógyűrű, hasonló módon következik, mint az Idempotens osztógyűrűk című [4] kutatómunkánkban $R(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ idempotens osztógyűrű volta. Világos, hogy a φ-nél vett kép $\mathbb{Z}$, amely izomorf a leképezés magja szerinti faktorral, és $\mathbb{Z}$ nem idempotens osztógyűrű. (Az ideál mellyel, faktorizálunk, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}$ lesz). □

A bizonyításnál az a tulajdonság romlik el, hogy az eredeti gyűrűben kapottt idempotensek, lehet, hogy kinullázódnak a faktorban.

Most pedig térjünk át a centrum vizsgálatára. Mint azt tudjuk Neumann-reguláris gyűrűk centruma Neumann-reguláris. De vajon az idempotens osztógyűrűkre igaz-e ez a tulajdonság. Ellenpéldát fogunk mutatni.

4. Példa. *A végtelen dimenziós mátrixgyűrű azon részgyűrűjét vesszük, mely bal felső négyzetes részmátrixában egy négyzetes racionális mátrix áll, illetve a főátlóbeli elemek egy rögzített egész számmal egyenlőek (ezen a négyzetes részmátrixon kívül).*

5. Állítás. *A fent definiált gyűrű, egy olyan idempotens osztógyűrű, mely centruma nem idempotens osztógyűrű.*

Bizonyítás. Világos, hogy ez egy gyűrű a szokásos műveletekre. Valamint az is, hogy idempotens osztógyűrű, hiszen a négyzetes részmátrix esetén a kváziinverzzel szorozzuk azt a részt, és a főátló többi része kinullázódik (racionális mátrixok gyűrűje Neumann-reguláris). Viszont ennek centruma a skalármátrixokból áll, vagyis azokból, melyek főátlójában egy rögzített egész szám áll. Így például a csupa 2-es főátlójú mátrixot nem fogjuk tudni nem 0 idempotensbe szorozni. □

Igen ám, de az Abel-reguláris gyűrűk (másnéven erősen reguláris gyűrűk) mintájára definiálható egy hasonló gyűrűosztály az idempotens osztógyűrűk esetén.

6. Definíció. *Egy gyűrű erősen idempotens osztógyűrű, ha idempotens osztógyűrű, és benne minden idempotens elem centrális.*

7. Állítás. *Az erősen idempotens osztógyűrűk centruma (erősen) idempotens osztógyűrű.*

Bizonyítás. Legyen R egy erősen idempotens osztógyűrű, valamint legyen $x \in Z(R)$. Ekkor $\exists y \in R$, hogy xy nem 0 idempotens. De ekkor mint tudjuk, yxy is nem 0 idempotensbe szorozza x-et. Legyen $r \in R$ egy tetszőleges gyűrűelem. A feltételeink alapján xy, illetve yx centrálisak, hiszen idempotensek. Ekkor

$$ryxy = yxry = yrxy = yxyr.$$

Vagyis yxy centrális, és idempotensbe szorozza x-et (ami idempotens volta miatt centrumbeli). És xy nem 0 idempotens, ezért $xyxy$ is az. □

8. Lemma. *Legyen R egy idempotens osztógyűrű. Ekkor $M_n(R)$ szintén idempotens osztógyűrű.*

Bizonyítás. Legyen $0 \neq X \in M_n(R)$. Ekkor létezik X-nek egy nem nulla eleme, legyen mondjuk ez az i. sor j. eleme mégpedig az $y \in R$ elem. Mint azt korábbról tudjuk, elég belátnunk, hogy X-et tudjuk két oldalról úgy szorozni mátrixokkal, hogy nem nulla idempotenset kapjunk. Legyen E_{st} az a mátrix, melynek s. sorának t. eleme 1, a többi pedig 0. Ekkor $E_{ii}XE_{jj}$ olyan mátrix, melynek i. sorának j. eleme y a többi pedig 0. Egy permutációmátrixszal elérhetjük, hogy ez az y elem a főátlóra kerüljön, méghozzá a főátló i. helyére a sorokat cserélgetve (azaz balról szorozva), legyen ez a permutációmátrix P. Ekkor $PE_{ii}XE_{jj}$ egy olyan mátrix, melyben a főátló i. eleme y a többi 0. Mivel $y \neq 0$, így $\exists z \in R$, hogy yz egy nem 0 idempotens. Legyen Z_{ii} az a mátrix, melyben a főátló i. helyén z szerepel a többi helyen pedig 0. Ekkor a $PE_{ii}XE_{jj}Z_{ii}$ mátrix olyan, hogy a főátló i. helyén yz szerepel, a többi helyen pedig 0. És mivel yz egy nem 0 idempotens, így ez a mátrix nem 0 idempotens. □

A fenti lemma, és egy korábbi állítás ismeretében pedig levonhatjuk a következőt:

9. Tétel. *Az idempotens osztógyűrűség egy Morita-invariáns gyűrűtulajdonság.*

Bizonyítás. Legyen R egy idempotens osztógyűrű, valamint S egy R-Morita-ekvivalens gyűrű. Ekkor a Morita-tétel alapján $\exists n \in \mathbb{N}$ és $\exists e \in M_n(R)$ idempotens, hogy $S \cong eM_n(R)e$. Igen ám, de a 8. lemma alapján $M_n(R)$ idempotens osztógyűrű, valamint a [4] 12. állítása miatt $eM_n(R)e \cong S$ idempotens osztógyűrű. □

Felmerül a kérdés, hogy az Idempotens osztógyűrűségnek mi a moduluselméleti megfogalmazása.

3. Moduluselméleti vizsgálódások

A következőkben definiálunk egy modulusosztályt, az endoreguláris modulusok mintájára. Valamint ezekről látunk be állításokat. Az állítások a [3] cikkben szereplő állítások analogonjai, illetve erősítései.

10. Definíció. *Legyen R gyűrű M pedig egy R-modulus. Azt mondjuk, hogy M rendelkezik az EIO tulajdonsággal, ha $End_R(M)$ idempotens osztógyűrű.*

11. Állítás. *Legyen R gyűrű, M egy EIO R-modulus, valamint legyen $N \leq M$ egy direkt összeadandó M-ben. Ekkor N szintén EIO*

Bizonyítás. Ismert, hogy mivel $N \leq M$ direkt összeadandó, így $\exists e \in End_R(M)$, hogy $End_R(N) = eEnd_R(M)e$. De $End_R(M)$ idempotens osztógyűrű, így $eEnd_R(M)e = End_R(N)$ is az. □

12. Állítás. *Legyen R gyűrű, M pedig egy EIO R-modulus. Ekkor $\forall 0 \neq \varphi \in End_R(M)$, $\exists K_1, K_2 \leq M$ direkt összeadandók, hogy $K_1 \neq 0, K_2 \neq M$, és $K_1 \leq Im\varphi$, és $Ker\varphi \leq K_2$.*

Bizonyítás. Vegyünk $0 \neq \varphi \in End_R(M)$ endomorfizmust. Ekkor a feltételeink alapján (és a jól ismert, mindkét oldalról idempotensbe szorzó elemet használva) $\exists \psi \in End_R(M)$, hogy $\varphi\psi$, és $\psi\varphi$ egyaránt nem 0 idempotensek. Ekkor $\varphi\psi M \leq \varphi M$, de $\varphi\psi$ nem 0 idempotens volta miatt $0 \neq \varphi\psi M =: K_1$, megfelelő választás K_1-nek. Hasonlóan $Ker\varphi \leq Ker\psi\varphi$, de $\psi\varphi$ nem 0 idempotens volta miatt $M \neq Ker\psi\varphi =: K_2$ megfelelő választás lesz K_2-nek. □

Természetesen merül fel az a kérdés, hogy az EIO modulusokat hogyan jellemezzük. Az endoregularitás [3] cikkben megtalálható jellemzéséhez hasonlóan próbálkoztunk a 12. állítással. Megoldatlan, hogy igaz-e a megfordítása, tehát:

Legyen R gyűrű, M R-modulus, hogy $\forall 0 \neq \varphi \in End_R(M)$ esetén $\exists K_1, K_2$ direkt összeadandók, hogy $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq M$, hogy $K_1 \leq Im\varphi$, és $Ker\varphi \leq K_2$. Igaz-e hogy ekkor M EIO?

Most pedig a relatív endoregularitás általánosítását adjuk meg.

13. Definíció. *Legyen R gyűrű, valamint M, N R-modulusok. Azt mondjuk, hogy M N-re nézve relatív EIO (röviden N-EIO),ha $\forall 0 \neq \varphi \in Hom_R(M, N)$ modulushomomorfizmushoz $\exists \psi \in Hom_R(N, M)$, hogy $0 \neq (\varphi\psi)^2 = \varphi\psi \in End_R(N)$.*

14. Megjegyzés. *Egy alapvető megfigyelés, hogy a definíció itt is jobb-bal szimmetrikus, ugyanazzal az indoklással, mint az idempotens osztógyűrűk esetén, de itt más-más modulusok idempotens endomorfizmusait kapjuk meg.*

Most pedig következzen a [3] cikk 3.5. állításának erősítése:

15. Állítás. *Legyen R egy gyűrű, valamint M, N direkt felbonthatatlan R-modulusok, hogy M N-EIO. Ekkor $Hom_R(M, N) = \{0\}$, vagy $M \cong N$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $Hom_R(M, N) \neq 0$. Ekkor $\exists 0 \neq \varphi \in Hom_R(M, N)$, tehát a feltételeink alapján $\psi \in Hom_R(N, M)$, hogy $0 \neq (\varphi\psi)^2 = \varphi\psi \in End_R(N)$, sőt a sokat használt jobb-bal szimmetriával feltehető, hogy olyan ψ-t találtunk, amely mindkét oldalról idempotensbe szorozza φ-t. Igen ám, de $\varphi\psi$ idempotens volta miatt $\varphi\psi N$, és $Ker\varphi\psi$ direkt összeadandók N-ben (hasonlóan $\psi\varphi M$, $Ker\psi\varphi$ direkt összeadandók M-ben).Mivel azonban $\varphi\psi \neq 0$ (illetve $\psi\varphi \neq 0$), így ez csak $\varphi\psi N = N$, $Ker\varphi\psi = 0$ (illetve $\psi\varphi M = M, Ker\psi\varphi = 0$) módon állhat fenn. De $N = \varphi\psi N \subseteq \varphi M \subseteq N$, vagyis $\varphi M = N$, tehát φ szürjektív. Illetve $Ker\varphi \subseteq Ker\psi\varphi = 0$, vagyis $Ker\varphi = 0$, tehát φ injektív. Vagyis φ izomorfizmus M és N között. □

A [3] cikkben ez relatív endoregularitással volt kimondva, amiből nyilvánvalóan következik a relatív EIO-ság.

Most pedig szintén a [3] cikk a 3.11.-es karakterizációs tételével analóg tételt bizonyítunk.

16. Lemma. *Legyen R gyűrű, I egy véges indexhalmaz, M, N R-modulusok valamint $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Ekkor M N-EIO pontosan akkor, ha M_i N-EIO $\forall i \in I$ esetén.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Világos, hogy, ha $\varphi \in Hom_R(M_i, N)$ esetén $\varphi \in Hom_R(M, N)$.

$\Leftarrow$: Indukciót alkalmazunk az I indexhalmaz elemszámára, legyen ez n. Az $n = 1$ eset nyilvánvaló.

$n = 2$: Legyen $M = M_1 \bigoplus M_2$, és $e_1, e_2 \in End_R(M)$ az M_1-re és M_2-re történő vetítések. Legyen $0 \neq \varphi \in Hom_R(M, N)$ egy modulushomomorfizmus. Ekkor $\varphi e_1 \in Hom_R(M_1, N)$ homomorfizmushoz $\exists \psi \in Hom_R(N, M_1)$, hogy $\psi\varphi e_1 = (\psi\varphi e_1)^2$. Ekkor $\psi\varphi e_1\psi\varphi e_1 - \psi\varphi e_1 = 0$, tehát $(\psi\varphi e_1\psi\varphi - \psi\varphi)e_1 = 0$, de $e_1\psi = \psi$, tehát $(\psi\varphi\psi\varphi - \psi\varphi)e_1 = 0$. Ha $\psi\varphi\psi\varphi - \psi\varphi = 0$ állna fenn, akkor készen lennénk. Most tegyük fel, hogy $0 \neq \psi\varphi\psi\varphi - \psi\varphi = x$, mint tudjuk, $xe_1 = 0$, tehát $x = x(e_1 + e_2) = xe_2 \in Hom_R(M_2, N)$, így $\exists y \in Hom_R(N, M_2)$, hogy $yxyx - yx = 0$, (és $yx \neq 0$) de ekkor $x = xe_2$ miatt $(yxyx - yx)e_2 = 0$. Tehát $yxyx - yx = (yxyx - yx)(e_1 + e_2) = 0$. Ami azt jelenti, hogy $yx \in Hom_R(M,N)$ egy nem 0 idempotens, de $yx = y(\psi\varphi\psi\varphi - \psi\varphi)$=$y(\psi\varphi\psi - \psi)\varphi$, azaz $y(\psi\varphi\psi - \psi)$ nem 0 idempotensbe szorozza x-et. Tehát az $n = 2$ eset kész.

Most tegyük fel, hogy $n = k-1$-ig igaz az állítás. Ekkor, ha $M = \bigoplus_{i=1}^{k-1} M_i \bigoplus M_k$, ahol M_k, N-EIO, illetve az indukciós feltevés miatt $\bigoplus_{i=1}^{k-1} M_i$ szintén N-EIO, most az $n = 2$ esetet ezekre alkalmazva készen vagyunk. □

Hasonlóan bizonyítható a következő:

17. Lemma. *Legyen R gyűrű, I egy véges indexhalmaz M, N R-modulusok, valamint $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$. Ekkor M N-EIO pontosan akkor, ha M N_i-EIO $\forall i \in I$ esetén.*

Végül a fenti két lemmából azonnal következik az alábbi tétel:

18. Tétel. *Legyen R gyűrű, I, J két véges indexhalmaz, M, N R-modulusok, hogy $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $N = \bigoplus_{j \in J} N_j$. Ekkor M N-EIO pontosan akkor, ha M_i N_j-EIO $\forall (i,j) \in (I,J)$ párra.*

Hivatkozások

[1] K R Goodearl. *Von Neumann Regular Rings*. Krieger Publishing Company, 1991.

[2] I. Kaplansky. *Rings of Operators*. Mathematics 337 a, summer 1955. Department of Mathematics, University of Chicago, 1955. URL: https://books.google.hu/books?id=jh7vAAAAMAAJ.

[3] Gangyong Lee, Syed Rizvi és Seliste Cosmin. "Modules Whose Endomorphism Rings are Von Neumann Regular". *Communications in Algebra* 41 (2013. nov.). DOI: 10.1080/00927872.2012.700979.

[4] Á. Metzger. "Idempotens osztógyűrűk". 2025. dec. URL: https://math-projects.elte.hu/media/works/478/report/Idempotens_Oszt%C3%B3gy%C5%B1r%C5%B1k-vegleges.pdf.

[5] W. Nicholson. "I-rings". *Transactions of The American Mathematical Society - TRANS AMER MATH SOC* 207 (1975. jún.). DOI: 10.2307/1997182.

[6] W. Nicholson. "Lifting Idempotents and Exchange Rings". *Transactions of The American Mathematical Society - TRANS AMER MATH SOC* 229 (1977. máj.). DOI: 10.2307/1998510.