

Idempotens osztógyűrűk-második felvonás

Metzger Ábris
Témavezető: Dr. Ágoston István

2025

Definíció

Egy R gyűrű idempotens osztógyűrű, ha $\forall 0 \neq x \in R$ elemre $\exists y \in R$ elem, hogy $0 \neq xy = (xy)^2$ idempotens.

Sokat használjuk azt, hogy a definíció jobb-bal szimmetrikus, illetve, hogy elegendő, megkövetelni, hogy minden $x \in R$ elemet két $y, z \in R$ elemmel $yxz = (yxz)^2$ nem 0 idempotensbe tudunk szorozni.

Sikeresen válaszoltunk meg pár az előző kutatómunka során nyitva maradt kérdést, illetve az endoregularitás, és a relatív endoregularitás általánosításával foglalkoztunk

A centrummal kapcsolatban a következőkre jutottunk:

- Létezik idempotens osztógyűrű melynek centruma nem idempotens osztógyűrű. (Ez a definíció ihletéül szolgáló Neumann-reguláris gyűrűkre nem igaz, Neumann-reguláris gyűrűk centruma Neumann-reguláris) Méghozzá: A végtelen dimenziós mátrixgyűrű azon részgyűrűjét vesszük, mely bal felső négyzetes részmátrixában egy négyzetes racionális mátrix áll, illetve a főátlóbeli elemek egy rögzített egész számmal egyenlők (ezen a négyzetes részmátrixon kívül). Ez idempotens osztógyűrű, de a centruma \mathbb{Z} , mely nem az.
- De kicsit szigorítva a feltételeket a következő állítást kapjuk: Ha egy idempotens osztógyűrűben minden idempotens centrális, akkor a centrum idempotens osztógyűrű.

Mátrixgyűrűk idempotens osztógyűrűk felett, és következmény

Idempotens osztógyűrűk feletti mátrixgyűrűkkel kapcsolatban a következőre jutottunk:

- Ha R idempotens osztógyűrű, akkor $M_n(R)$ is az, $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Most emlékezzünk vissza egy az előző kutatómunkában bizonyított állításra:

- Ha R idempotens osztógyűrű, $e^2 = e \in R$, akkor eRe szintén idempotens osztógyűrű.

A fenti két állításból a Morita-tétel segítségével következik, hogy

- Az idempotens osztógyűrűség egy Morita-invariáns gyűrűtulajdonság

Modulusok, melyek endomorfizmusgyűrűje idempotens osztógyűrű

Definíció

Legyen R gyűrű M pedig egy R -modulus. Azt mondjuk, hogy M endoreguláris, ha $End_R(M)$ Neumann-reguláris.

Ennek mintájára, megadható a következő definíció:

Definíció

Legyen R gyűrű M pedig egy R -modulus. Azt mondjuk, hogy M rendelkezik az EIO tulajdonsággal, ha $End_R(M)$ idempotens osztógyűrű.

Ezekkel a modulusokkal kapcsolatban a következőkre jutottunk:

- Ha M EIO, és $N \leq M$ egy direkt összeadandó, akkor N szintén EIO.
- Legyen R gyűrű, M pedig egy EIO R -modulus. Ekkor $\forall 0 \neq \varphi \in End_R(M)$, $\exists K_1, K_2 \leq M$ direkt összeadandók, hogy $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq M$, és $K_1 \leq Im\varphi$, és $Ker\varphi \leq K_2$.

Kérdés: Igaz-e a második állítás megfordítása?

A relatív EIO tulajdonság

Definíció

Legyen R gyűrű, M, N R -modulusok, ekkor azt mondjuk, hogy M N -re nézve relatív endoreguláris, ha $\forall \varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$ esetén $\exists \psi \in \text{Hom}_R(N, M)$, hogy $\varphi\psi\varphi = \varphi$.

Ennek mintájára a következőt definiáltuk:

Definíció

Legyen R gyűrű, valamint M, N R -modulusok. Azt mondjuk, hogy M N -re nézve relatív EIO (röviden N -EIO), ha $\forall 0 \neq \varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$ esetén $\exists \psi \in \text{Hom}_R(N, M)$, hogy $0 \neq (\varphi\psi)^2 = \varphi\psi \in \text{End}_R(N)$.

Ezekkel a modulusokkal sikerült erősíteni egy relatív endoregularitáshoz kapcsolódó állítást, illetve egy jellemzési tételt:

- Legyen R egy gyűrű, valamint M, N direkt felbonthatatlan R -modulusok, hogy M N -EIO. Ekkor $\text{Hom}_R(M, N) = \{0\}$, vagy $M \cong N$.
- Legyen R gyűrű, I egy véges indexhalmaz, M, N R -modulusok valamint $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Ekkor M N -EIO $\Leftrightarrow M_i$ N -EIO $\forall i \in I$ -re.