Rees-mátrix félcsoportok automorfizmusai

Áron Jörg

2026. május

Témavezető: Dr. Ágoston István

1. Bevezetés

Legyen S egy félcsoport KS pedig a $\mathbb{K}$ test feletti félcsoportalgebra. Természetes kérdés, hogy KS automorfizmusai milyen kapcsolatban állnak S félcsoportautomorfizmusaival: pontosabban, egy $\Psi \in \mathrm{Aut}(KS)$ algebrai automorfizmus mikor és hogyan indukál $\varphi \in \mathrm{Aut}(S)$ félcsoportautomorfizmust.

Ez a kérdés csoportalgebrák esetén klasszikus és mélyen vizsgált terület. Az egyik leghíresebb eredmény Higman nevéhez fűződik: ha G véges Abel-csoport, akkor $\mathrm{Aut}(KG)$ lényegében $\mathrm{Aut}(G)$-ből és az algebra egységeinek csoportjából épül fel. Általánosabb csoportokra a kérdés jóval nehezebb; az ún. **izomorfizmus-probléma** (két csoportalgebra mikor izomorf mint algebra) és az **automorfizmus-probléma** (az algebrai automorfizmusok mikor standard, azaz csoportelemek permutációjából származó alakúak) a mai napig aktív kutatási terület.

Félcsoportok esetén a kérdés kevésbé kidolgozott. Első lépésként érdemes egy konkrét, jól kezelhető félcsoportosztályon megvizsgálni a félcsoportautomorfizmusok szerkezetét, mielőtt az ezek feletti algebrák automorfizmusait tanulmányoznánk. Erre a célra a **Rees-mátrix félcsoportok** különösen alkalmasak: egyrészt gazdag struktúrával rendelkeznek (a Rees–Suschkewitsch-tétel szerint minden teljesen 0-egyszerű félcsoport ilyen alakú), másrészt automorfizmusaik elvben explicit módon leírhatók.

A Rees-mátrix félcsoportok automorfizmusainak általános leírása szerepel Araujo, Bünau, Mitchell és Neunhöffer [5] cikkében, ahol Munn 1955-ös disszertációjára visszavezetve megmutatják az automorfizmusok általános alakját, ez azonban elég bonyolult, így az ezek feletti félcsoportalgebrák automorfizmusainak vizsgálata meglehetősen körülményessé válna rajtuk keresztül.

A következőkben mi egy speciális, de természetes feltétel mellett – nevezetesen amikor a szendvicsmátrix összes eleme a G csoport $Z(G)$ centrumából kerül ki – a fenti eredménytől *független* úton bizonyítjuk be az automorfizmusok teljes leírását.

2. Rees-mátrix félcsoportok automorfizmusai

2.1. Alapfogalmak

Legyen G egy csoport, I és Λ nemüres indexhalmazok, és $P = (p_{\lambda,i})_{\lambda\in\Lambda, i\in I}$ egy $\Lambda \times I$-es mátrix G elemeiből. A **Rees-mátrix félcsoport** $\mathcal{M}^0(I, \Lambda, G, P)$ a

$$(I \times G \times \Lambda)$$

halmazon értelmezett, a következő szorzással:

$$(i, g, \lambda) \cdot (j, h, \mu) = (i,\ g\, p_{\lambda,j}\, h,\ \mu),$$

P-t - a szorzás definíciója miatt - szokás szendvicsmátrixnak nevezni.

Idempotensek. Egy (i, g, λ) elem pontosan akkor idempotens, ha

$$(i, g, \lambda)^2 = (i, g, \lambda) \Leftrightarrow g\, p_{\lambda,i}\, g = g \Leftrightarrow g = p_{\lambda,i}^{-1},$$

tehát az idempotensek pontosan az $(i,\, p_{\lambda,i}^{-1},\, \lambda)$ alakú elemek, $(i,\lambda) \in I \times \Lambda$ párokkal indexelve.

Maximális részcsoportok. Rögzített $(i,\lambda) \in I \times \Lambda$ párhoz a

$$\tilde{G}_{i,\lambda} = \{(i,g,\lambda) : g \in G\}$$

részhalmaz részcsoportot alkot (egységeleme $(i,\, p_{\lambda,i}^{-1},\, \lambda)$), és izomorf G-vel a

$$\varphi_{i,\lambda} : g \mapsto (i,\, g\, p_{\lambda,i}^{-1},\, \lambda)$$

leképezésen keresztül. Ezek a részcsoportok **maximálisak** és **diszjunktak**, és a félcsoport ezek diszjunkt uniójaként kapható meg:

$$\mathcal{M}^0 \setminus \{0\} = \bigsqcup_{(i,\lambda)\in I\times\Lambda} \tilde{G}_{i,\lambda}.$$

2.2. Az automorfizmusok jellemzése

1. Állítás. *Legyen $p_{\lambda,i} \in Z(G)$ minden $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$-ra. Ekkor $\mathcal{M}^0(I,\Lambda,G,P)$ Rees-mátrix félcsoport Φ automorfizmusai*

$$\Phi(i,g,\lambda) = \big(\alpha(i),\ \theta(g\, p_{\lambda,i})\, p_{\beta(\lambda),\alpha(i)}^{-1},\ \beta(\lambda)\big)$$

alakúak, ahol $\alpha \in \mathrm{Sym}(I)$, $\beta \in \mathrm{Sym}(\Lambda)$ permutációk és $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$, amelyekre teljesül a

$$\theta(p_{\lambda,i} \cdot p_{\mu,j} \cdot p_{\lambda,j}^{-1} \cdot p_{\mu,i}^{-1}) = p_{\beta(\lambda),\alpha(i)} \cdot p_{\beta(\mu),\alpha(j)} \cdot p_{\beta(\lambda),\alpha(j)}^{-1} \cdot p_{\beta(\mu),\alpha(i)}^{-1} \tag{H}$$

kompatibilitási feltétel.

Érdemes észrevenni, hogy a fenti (H) feltétel automatikusan teljesül, ha $i = j$, vagy $\lambda = \mu$.

Az automorfizmus hat a maximális részcsoportokon. Mivel $\mathcal{M}^0 \setminus \{0\}$ diszjunkt uniója a $\tilde{G}_{i,\lambda}$ maximális részcsoportoknak, és Φ automorfizmus megőrzi a csoportstruktúrát, ezért maximális részcsoportokat maximális részcsoportokba visz:

$$\Phi(\tilde{G}_{i,\lambda}) = \tilde{G}_{i',\lambda'}$$

valamely (i',λ') párra. Ez definiál egy $f : I\times\Lambda \to I\times\Lambda$ permutációt. Megmutatjuk, hogy f "függetlenül hat" I-n és Λ-n, azaz $f(i,\lambda) = (\alpha(i),\beta(\lambda))$ valamilyen $\alpha \in \mathrm{Sym(I)}$ és $\beta \in \mathrm{Sym}(\Lambda)$ permutációkra.

Jelöljük $f(i,\lambda) = (f_1(i,\lambda),\, f_2(i,\lambda))$. Megmutatjuk, hogy $f_1(i,\lambda)$ független λ-tól és $f_2(i,\lambda)$ független i-től.

Vegyük észre, hogy tetszőleges $\lambda,\mu \in \Lambda$ esetén

$$i = j \iff \tilde{G}_{i,\lambda} \cdot \tilde{G}_{j,\mu} \subseteq \tilde{G}_{j,\mu}$$

Mivel Φ homomorfizmus, ezt a feltételt megőrzi:

$$i = j \iff \tilde{G}_{f_1(i,\lambda),f_2(i,\lambda)} \cdot \tilde{G}_{f_1(j,\mu),f_2(j,\mu)} \subseteq \tilde{G}_{f_1(j,\mu),f_2(j,\mu)} \iff f_1(i,\lambda) = f_2(j,\mu) \quad \text{minden } \lambda, \mu\text{-ra.}$$

Tehát $f_1(i,\lambda) = f_1(j,\mu)$ pontosan akkor, ha $i = j$, függetlenül λ-tól és μ-től. Ez azt jelenti, hogy $f_1(i,\lambda)$ független λ-tól: jelöljük $\alpha(i) := f_1(i,\lambda)$.

Hasonlóan, $\tilde{G}_{i,\lambda} \cdot \tilde{G}_{j,\mu} \subseteq \tilde{G}_{i,\lambda}$ pontosan akkor, ha $\lambda = \mu$, tehát:

$$\lambda = \mu \iff f_2(i,\lambda) = f_2(j,\mu)$$

amiből $f_2(i,\lambda)$ független i-től: jelöljük $\beta(\lambda) := f_2(i,\lambda)$.

Mivel f bijekció és $f(i,\lambda) = (\alpha(i),\beta(\lambda))$ szeparálható alakú, $\alpha \in \mathrm{Sym}(I)$ és $\beta \in \mathrm{Sym}(\Lambda)$ permutációk.

Φ alakja általános elemeken. Mivel Φ leszűkítve $\tilde{G}_{i,\lambda} \to \tilde{G}_{\alpha(i),\beta(\lambda)}$ csoportizomorfizmus, a φ leképezéseken keresztül egy $\theta_{i,\lambda} \in \mathrm{Aut}(G)$ automorfizmust indukál:

$$\theta_{i,\lambda} = \varphi^{-1}_{\alpha(i),\beta(\lambda)} \circ \Phi\big|_{\tilde{G}_{i,\lambda}} \circ \varphi_{i,\lambda}.$$

Ez a következő kommutatív diagramnak felel meg:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi_{i,\lambda}"] \arrow[d, "\theta_{i,\lambda}"'] & \tilde{G}_{i,\lambda} \arrow[d, "\Phi|_{\tilde{G}_{i,\lambda}}"] \\
G \arrow[r, "\varphi_{\alpha(i),\beta(\lambda)}"'] & \tilde{G}_{\alpha(i),\beta(\lambda)}
\end{tikzcd}$$

Mivel $\varphi^{-1}_{i,\lambda}(i,g,\lambda) = g\,p_{\lambda,i}$, az út a bal felső sarokból jobbra, majd le, majd balra:

$$g \xrightarrow{\varphi_{i,\lambda}} (i,\, gp^{-1}_{\lambda,i},\, \lambda) \xrightarrow{\Phi} \big(\alpha(i),\ \theta_{i,\lambda}(g)\, p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(i)},\ \beta(\lambda)\big) \xrightarrow{\varphi^{-1}_{\alpha(i),\beta(\lambda)}} \theta_{i,\lambda}(g),$$

tehát:

$$\Phi(i,g,\lambda) = \big(\alpha(i),\ \theta_{i,\lambda}(g) \cdot \theta_{i,\lambda}(p_{\lambda,i}) \cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(i)},\ \beta(\lambda)\big).$$

A (H) homomorfizmus-feltétel. Írjuk ki $\Phi\big((i,g,\lambda)\cdot(j,h,\mu)\big) = \Phi(i,g,\lambda)\cdot\Phi(j,h,\mu)$-t.

A bal oldal:

$$\Phi(i,\, g\,p_{\lambda,j}\,h,\, \mu) = \big(\alpha(i),\ \theta_{i,\mu}(g)\cdot\theta_{i,\mu}(p_{\lambda,j})\cdot\theta_{i,\mu}(h)\cdot\theta_{i,\mu}(p_{\mu,i})\cdot p^{-1}_{\beta(\mu),\alpha(i)},\ \beta(\mu)\big).$$

A jobb oldal:

$$\begin{aligned}
&\Phi(i,g,\lambda)\cdot\Phi(j,h,\mu) \\
&= \big(\alpha(i),\theta_{i,\lambda}(g)\cdot\theta_{i,\lambda}(p_{\lambda,i})\cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(i)},\beta(\lambda)\big)\cdot\big(\alpha(j),\theta_{j,\mu}(h)\cdot\theta_{j,\mu}(p_{\mu,j})\cdot p^{-1}_{\beta(\mu),\alpha(j)},\beta(\mu)\big) \\
&= \big(\alpha(i),\ \theta_{i,\lambda}(g)\cdot\theta_{i,\lambda}(p_{\lambda,i})\cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(i)}\cdot p_{\beta(\lambda),\alpha(j)}\cdot\theta_{j,\mu}(h)\cdot\theta_{j,\mu}(p_{\mu,j})\cdot p^{-1}_{\beta(\mu),\alpha(j)},\ \beta(\mu)\big).
\end{aligned}$$

Mivel $p_{\lambda,i} \in Z(G)$, ezért $\theta_{i,\lambda}(p_{\lambda,i}) \in Z(G)$ is, tehát a p-s tagok átemelhetők, és a két oldal egyenlőségéből:

$$\theta_{i,\lambda}(g) \cdot \theta_{j,\mu}(h) \cdot A = \theta_{i,\mu}(g) \cdot \theta_{i,\mu}(h) \cdot B, \tag{$*$}$$

ahol

$$\begin{aligned}
A &= \theta_{i,\lambda}(p_{\lambda,i}) \cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(i)} \cdot p_{\beta(\lambda),\alpha(j)} \cdot \theta_{j,\mu}(p_{\mu,j}) \cdot p^{-1}_{\beta(\mu),\alpha(j)},\\
B &= \theta_{i,\mu}(p_{\lambda,j}) \cdot \theta_{i,\mu}(p_{\mu,i}) \cdot p^{-1}_{\beta(\mu),\alpha(i)}.
\end{aligned}$$

$g = h = e$ **eset:** $(*)$-ból közvetlenül $A = B$.

$\theta_{i,\lambda}$ **független λ-tól.** (1) visszahelyettesítésével $(*)$ alakja:

$$\theta_{i,\lambda}(g) \cdot \theta_{j,\mu}(h) \cdot A = \theta_{i,\mu}(g) \cdot \theta_{i,\mu}(h) \cdot A. \tag{$**$}$$

Legyen $h = e$, és osszunk jobbról A-val:

$$\theta_{i,\lambda}(g) = \theta_{i,\mu}(g) \quad \forall\, g \in G,\ \forall\, \lambda, \mu. \tag{2}$$

Tehát $\theta_{i,\lambda}$ független λ-tól, jelöljük $\theta_i := \theta_{i,\lambda}$.

$\theta_{i,\lambda}$ **független i-től.** (2) felhasználásával $(**)$ alakja $g = e$ esetén:

$$\theta_{j,\mu}(h) \cdot A = \theta_i(h) \cdot A.$$

Osszunk jobbról A-val:

$$\theta_{j,\mu}(h) = \theta_i(h) \quad \forall h \in G,\ \forall i, j. \tag{3}$$

Tehát θ_i független i-től is, minden i-re. Jelöljük a közös értéket $\theta := \theta_i \in \mathrm{Aut}(G)$.

A kompatibilitási feltétel. $\theta_{i,\lambda} = \theta$ visszahelyettesítésével az $A = B$ egyenletbe (1):

$$\theta(p_{\lambda,i}) \cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(i)} \cdot p_{\beta(\lambda),\alpha(j)} \cdot \theta(p_{\mu,j}) \cdot p^{-1}_{\beta(\mu),\alpha(j)} = \theta(p_{\lambda,j}) \cdot \theta(p_{\mu,i}) \cdot p^{-1}_{\beta(\mu),\alpha(i)}.$$

Átrendezve:

$$\theta(p_{\lambda,i}) \cdot \theta(p_{\mu,j}) \cdot \theta(p_{\lambda,j})^{-1} \cdot \theta(p_{\mu,i})^{-1} = p_{\beta(\lambda),\alpha(i)} \cdot p_{\beta(\mu),\alpha(j)} \cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(j)} \cdot p^{-1}_{\beta(\mu),\alpha(i)},$$

azaz:

$$\theta\Big(p_{\lambda,i} \cdot p_{\mu,j} \cdot p^{-1}_{\lambda,j} \cdot p^{-1}_{\mu,i}\Big) = p_{\beta(\lambda),\alpha(i)} \cdot p_{\beta(\mu),\alpha(j)} \cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(j)} \cdot p^{-1}_{\beta(\mu),\alpha(i)}. \tag{4}$$

Elégségesség. Megfordítva, ha (α, β, θ) kielégíti (4)-et, akkor

$$\Phi(i, g, \lambda) = \big(\alpha(i),\ \theta(g\, p_{\lambda,i}) \cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(i)},\ \beta(\lambda)\big)$$

valóban félcsoportautomorfizmus: bijektivitása nyilvánvaló (α, β, θ mind bijekciók), a homomorfizmus-tulajdonság pedig éppen (4)-ből következik.

2.3. Példa

Legyen $G = \mathbb{Z}_3$ (additívan), $I = \{1,2\}$, $\Lambda = \{1,2,3\}$, és a szendvicsmátrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

azaz $p_{1,1} = p_{1,2} = p_{2,1} = p_{2,2} = p_{3,2} = 0$ és $p_{3,1} = 1$.

Mivel $\mathbb{Z}_3$ Abel-csoport, a centrumbeli feltétel automatikusan teljesül. Először meghatározzuk a lehetséges θ csoportautomorfizmusokat. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ elemei: az identitás $\theta_1 : x \mapsto x$, és $\theta_2 : x \mapsto 2x$, tehát $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)| = 2$.

A kompatibilitási feltételből meghatározzuk, hogy melyik θ lehetséges. A feltétel a $p_{3,1} = 1$ értékre:

$$\theta(p_{3,1} + p_{i,j} - p_{3,j} - p_{i,1}) = \theta(p_{3,1}) - \theta(p_{i,j}) = \begin{cases} \in \{-1,1\}, & \text{ha } (i,j) \neq (3,1) \\ 0, & \text{ha } (i,j) = (3,1) \end{cases}$$

ebből kapjuk $\big(\beta(3), \alpha(1)\big) = (3,1)$ szükségességét. Tehát $\beta(3) = 3$ és $\alpha(1) = 1$, amiből $\alpha = \mathrm{id}$

A többi $p_{\lambda,i} = 0$ érték nem ad további megszorítást. Tehát $\beta|_{\{1,2\}}$ szabad: az (1 2) csere megengedett.

Az automorfizmuscsoport tehát:

$$\mathrm{Aut}\big(\mathcal{M}^0\big) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

a négy automorfizmus:

$$\begin{aligned} \Phi_1(i,g,\lambda) &= (i,g,\lambda), & \Phi_2(i,g,\lambda) &= (i,g,\beta_2(\lambda)), \\ \Phi_3(i,g,\lambda) &= (i,-g,\lambda), & \Phi_4(i,g,\lambda) &= (i,-g,\beta_2(\lambda)), \end{aligned}$$

ahol $\beta_2 = (1\ 2)$.

Hivatkozások

[1] A. V. Rukolaine: *Center of the Semigroup Algebra of a Finite Inverse Semigroup over the Field of Complex Numbers*. Plenum Publishing Corporation, 1987.

[2] Jan Okninski: *Semigroup Algebras*. Marcel Decker, 1991.

[3] A. H. Clifford, G. B. Preston: *The Algebraic Theory of Semigroups*. American Mathematical Society, 2000.

[4] Benjamin Steinberg: *Representation Theory of Finite Monoids*. Springer, 2016.

[5] J.Araújo, P.V. Bünau, J.D. MItchell, M. Neunhöffer: *Computing automorphisms of semigroups*. Journal of Symbolic Computation 45 (2010), 373-392.