Rees-mátrix félcsoportok automorfizmusai

Automorphisms of Rees Matrix Semigroups

Jörg Áron · **2026. május**

Témavezető: Dr. Ágoston István

Motiváció

Alap kérdés: *Mikor és hogyan indukál egy* $\Psi \in \mathrm{Aut}(KS)$ *félcsoportalgebra automorfizmust egy* $\varphi \in \mathrm{Aut}(S)$ *félcsoport automorfizmus?*

Csoportalgebra-eset

Izomorfizmus probléma: $KG \cong KH$-ból általában nem következik G és H csoportizomorfiája, pl. n elemű Abel csoport csoportalgebrája a komplex számtest felett izmomorf C^n-el, ám az elemszámból még nem következik Abel csoportok izomorfiája

Félcsoportok esete

Kevésbé kidolgozott.

Első lépés: konkrét, jól kezelhető félcsoportosztályon vizsgálni az automorfizmusokat, mielőtt az algebrákra térünk.

Miért Rees-mátrix?

- Rees–Suschkewitsch: minden teljesen 0-egyszerű félcsoport ilyen alakú
- Gazdag struktúra
- Automorfizmusok elvben explicite leírhatók

Alapfogalmak – Rees-mátrix félcsoport

Legyen G csoport, I, Λ nemüres indexhalmazok, $P = (p_{\lambda,i})$ szendvicsmátrix G elemeiből.

Definíció: $M^0(I, \Lambda, G, P)$

Alaphalmaz: $I \times G \times \Lambda$

Szorzás:

$$(i, g, \lambda) \cdot (j, h, \mu) = (i,\ g\, p_{\lambda,j}\, h,\ \mu)$$

Miért „szendvics"?

A $p_{\lambda,j}$ tag „közbeékelődik” g és h közé a szorzásban.

- **Idempotensek:** $(i, g, \lambda)^2 = (i, g, \lambda) \iff g = p_{\lambda,i}^{-1}$
- **Maximális részcsoportok:** $\widetilde{G}_{i,\lambda} = \{(i, g, \lambda) : g \in G\} \cong G$ (izom. $\varphi_{i,\lambda} : g \mapsto (i, g\, p_{\lambda,i}^{-1}, \lambda))$
- **Diszjunkt felbontás:** $M^0 \setminus \{0\} = \bigsqcup_{(i,\lambda) \in I \times \Lambda} \widetilde{G}_{i,\lambda}$
- **Feltétel:** $p_{\lambda,i} \in Z(G)$ minden $i \in I, \lambda \in \Lambda$-ra (centrumbeli mátrix)

Az automorfizmus szerkezete – f szeparálhatósága

$\Phi \in \mathrm{Aut}(M^0)$ *megőrzi a maximális részcsoportokat:* $\Phi(\widetilde{G}_{i,\lambda}) = \widetilde{G}_{i',\lambda'}$. *Legyen* $f : I \times \Lambda \to I \times \Lambda$, $f(i,\lambda) = (i',\lambda')$.

Állítás: $f(i,\lambda) = (\alpha(i), \beta(\lambda))$, ahol $\alpha \in \mathrm{Sym}(I)$, $\beta \in \mathrm{Sym}(\Lambda)$

$$\widetilde{G}_{i,\lambda} \cdot \widetilde{G}_{j,\mu} \subseteq \widetilde{G}_{j,\mu} \iff i = j$$

Φ megőrzi ezt a feltételt:

$$f_1(i,\lambda) = f_1(j,\mu) \iff i = j \quad \Longrightarrow \quad f_1 \text{ független } \lambda\text{-tól: } \alpha(i).$$

Hasonlóan f_2 független i-től: $\beta(\lambda)$. $\square$

- $\Phi|_{\widetilde{G}_{i,\lambda}} : \widetilde{G}_{i,\lambda} \to \widetilde{G}_{\alpha(i),\beta(\lambda)}$ csoportizomorfizmus, indukál $\theta_{i,\lambda} \in \mathrm{Aut}(G)$.
- Általános alak (a φ leképezéseken keresztül): $\Phi(i,g,\lambda) = \left(\alpha(i),\ \theta_{i,\lambda}(g\, p_{\lambda,i}) \cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(i)},\ \beta(\lambda)\right)$

A homomorfizmus-feltétel – θ egységesítése

Írjuk ki $\Phi\big((i,g,\lambda)\cdot(j,h,\mu)\big) = \Phi(i,g,\lambda)\cdot\Phi(j,h,\mu)$ és hasonlítsuk össze.

A két oldal egyenlőségéből

$$\theta_{i,\mu}(g)\cdot\theta_{i,\mu}(h)\cdot B = \theta_{i,\lambda}(g)\cdot\theta_{j,\mu}(h)\cdot A \qquad (*)$$

1. $g = h = e$: közvetlenül $A = B$.
2. $h = e$, **jobbról A^{-1}:** $\theta_{i,\lambda}(g) = \theta_{i,\mu}(g)$ minden g,λ,μ-ra $\Longrightarrow$ $\theta_{i,\lambda}$ **független λ-tól:** θ_i.
3. $g = e$, **jobbról A^{-1}:** $\theta_{j,\mu}(h) = \theta_i(h)$ minden h,i,j-re $\Longrightarrow$ θ_i **független i-től:** $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$.

Következmény

$$\Phi(i,g,\lambda) \;=\; \Big(\alpha(i),\;\; \theta(g\cdot p_{\lambda,i})\cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(i)},\;\; \beta(\lambda)\Big)$$

ahol $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$ egyetlen, $\alpha \in \mathrm{Sym}(I)$ és $\beta \in \mathrm{Sym}(\Lambda)$.

Kompatibilitási feltétel (H)

Az $A = B$ *egyenletbe* $\theta = \theta_{i,\lambda}$ *visszahelyettesítve:*

(H) Kompatibilitási feltétel

$$\theta\left(p_{\lambda,i} \cdot p_{\mu,j} \cdot p_{\lambda,j}^{-1} \cdot p_{\mu,i}^{-1}\right) = p_{\beta(\lambda),\alpha(i)} \cdot p_{\beta(\mu),\alpha(j)} \cdot p_{\beta(\lambda),\alpha(j)}^{-1} \cdot p_{\beta(\mu),\alpha(i)}^{-1} \tag{H}$$

- **Megjegyzés:** (H) automatikusan teljesül, ha $i = j$ vagy $\lambda = \mu$.
- **Elégségesség:** ha (α, β, θ) kielégíti (H)-t, akkor

$$\Phi(i, g, \lambda) = \left(\alpha(i),\ \theta(g \cdot p_{\lambda,i}) \cdot p_{\beta(\lambda),\alpha(i)}^{-1},\ \beta(\lambda)\right)$$

  valóban automorfizmus.
- **Bijektivitás:** α, β, θ mind bijekciók $\Rightarrow$ Φ bijektív.
- **Homomorfizmus:** pontosan (H)-ból következik.

Főtétel – Az automorfizmusok teljes leírása

1. Állítás (Főtétel)

Legyen $p_{\lambda,i} \in Z(G)$ minden $i \in I, \lambda \in \Lambda$-ra.
Ekkor $M^0(I, \Lambda, G, P)$ automorfizmusai pontosan a következő alakú bijekciók:

$$\Phi(i, g, \lambda) \;=\; \Big(\alpha(i),\;\; \theta(g \cdot p_{\lambda,i}) \cdot p^{-1}_{\beta(\lambda),\alpha(i)},\;\; \beta(\lambda)\Big),$$

ahol $\alpha \in \mathrm{Sym}(I)$, $\beta \in \mathrm{Sym}(\Lambda)$, $\theta \in \mathrm{Aut}(G)$, amelyekre teljesül a (H) kompatibilitási feltétel.

Bizonyítás menete:

1. Φ permutálja a maximális részcsoportokat: $f(i, \lambda) = (\alpha(i), \beta(\lambda))$
2. Minden $\widetilde{G}_{i,\lambda} \to \widetilde{G}_{\alpha(i),\beta(\lambda)}$ leszűkítés $\theta_{i,\lambda} \in \mathrm{Aut}(G)$-t indukál
3. Homomorfizmus-feltételből: $\theta_{i,\lambda} = \theta$ (globálisan egységes)
4. $A = B$ egyenletből: (H) kompatibilitási feltétel $\Longleftrightarrow$ elégséges

Példa – $G = \mathbb{Z}_3$, $I = \{1, 2\}$, $\Lambda = \{1, 2, 3\}$

$\mathbb{Z}_3$ *Abel-csoport* $\Rightarrow$ *centrumbeli feltétel automatikusan teljesül.*

Szendvicsmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$p_{3,1} = 1$, többi $= 0$

Lehetséges θ és permutációk

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3) = \{\theta_1 : x \mapsto x,\ \theta_2 : x \mapsto 2x\}$, $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3)| = 2$

(H) feltétel $p_{3,1} = 1$-re: $\beta(3) = 3$ és $\alpha(1) = 1 \implies \alpha = \mathrm{id}$

$\beta|_{\{1,2\}}$ szabad: az $(1\ 2)$ csere megengedett. Legyen $\beta_2 = (1\ 2) \in \mathrm{Sym}(\{1, 2, 3\})$.

Eredmény: $\mathrm{Aut}(M^0) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (Klein csoport)

$$\Phi_1(i, g, \lambda) = (i, g, \lambda), \qquad \Phi_2(i, g, \lambda) = (i, g, \beta_2(\lambda)),$$

$$\Phi_3(i, g, \lambda) = (i, -g, \lambda), \qquad \Phi_4(i, g, \lambda) = (i, -g, \beta_2(\lambda)).$$

Összefoglalás

Struktúra $M^0(I,\Lambda,G,P)=\bigsqcup \widetilde{G}_{i,\lambda}$; idempotens: $(i,p_{\lambda,i}^{-1},\lambda)$; $\widetilde{G}_{i,\lambda}\cong G$

Főeredmény $p_{\lambda,i}\in Z(G)$ esetén: $\Phi=(\alpha,\beta,\theta)$ hármas, ahol $\alpha\in \mathrm{Sym}(I)$, $\beta\in\mathrm{Sym}(\Lambda)$, $\theta\in\mathrm{Aut}(G)$

(H) feltétel $\theta(p_{\lambda,i}p_{\mu,j}p_{\lambda,j}^{-1}p_{\mu,i}^{-1})=p_{\beta(\lambda),\alpha(i)}p_{\beta(\mu),\alpha(j)}p_{\beta(\lambda),\alpha(j)}^{-1}p_{\beta(\mu),\alpha(i)}^{-1}$

Példa $G=\mathbb{Z}_3$, 3×2-es P: $\mathrm{Aut}(M^0)\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ (négy explicit automorfizmus)

Irodalom

[1] A. V. Rukolaine.
Center of the Semigroup Algebra of a Finite Inverse Semigroup over the Field of Complex Numbers.
Plenum Publishing, 1987.

[2] J. Okniński.
Semigroup Algebras.
Marcel Dekker, 1991.

[3] A. H. Clifford, G. B. Preston.
The Algebraic Theory of Semigroups.
AMS, 2000.

[4] B. Steinberg.
Representation Theory of Finite Monoids.
Springer, 2016.