New results about $\mathbb{Q}$ and Δ-spaces

Ivanyos János Balázs

Székely Ákossal közös munka

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2026. június 3.

Q-terek

Definition

Egy topologikus teret Q-térnek nevezünk, ha minden részhalmaza G_δ-halmaz.

Q-terek

Definition

Egy topologikus teret Q-térnek nevezünk, ha minden részhalmaza G_δ-halmaz.

- Eredetileg a Q-tereket a valós számegyenes nem megszámlálható részhalmazaiként vizsgálták. Az ilyen részhalmazokat Q-halmazoknak nevezzük.

$\mathbb{Q}$-terek

Definition

Egy topologikus teret $\mathbb{Q}$-térnek nevezünk, ha minden részhalmaza G_δ-halmaz.

- Eredetileg a $\mathbb{Q}$-tereket a valós számegyenes nem megszámlálható részhalmazaiként vizsgálták. Az ilyen részhalmazokat $\mathbb{Q}$-halmazoknak nevezzük.
- Könnyű látni, hogy CH mellett nincsenek $\mathbb{Q}$-halmazok. Továbbá ismert, hogy MA mellett minden, 2^ω-nál kisebb számosságú részhalmaza a valós számoknak $\mathbb{Q}$-halmaz.

Q-terek

Definition

Egy topologikus teret Q-térnek nevezünk, ha minden részhalmaza G_δ-halmaz.

- Eredetileg a Q-tereket a valós számegyenes nem megszámlálható részhalmazaiként vizsgálták. Az ilyen részhalmazokat Q-halmazoknak nevezzük.
- Könnyű látni, hogy CH mellett nincsenek Q-halmazok. Továbbá ismert, hogy MA mellett minden, 2^ω-nál kisebb számosságú részhalmaza a valós számoknak Q-halmaz.
- Később Balogh Zoltán konstrulát egy absztrakt Q-teret ZFC-ben.

Δ-terek

Definition

Egy topologikus teret Δ-térnek nevezünk, ha minden olyan $\{D_n : n \in \omega\}$ csökkenő részhalmazsorozathoz amelynek metszete üres, létezik nyílt részhalmazoknak egy csökkenő $\{U_n : n \in \omega\}$ sorozata úgy, hogy minden $n \in \omega$-re $U_n \supseteq D_n$, és

$$\bigcap_{n \in \omega} U_n = \emptyset.$$

Δ-terek

Definition

Egy topologikus teret Δ-térnek nevezünk, ha minden olyan $\{D_n : n \in \omega\}$ csökkenő részhalmazsorozathoz amelynek metszete üres, létezik nyílt részhalmazoknak egy csökkenő $\{U_n : n \in \omega\}$ sorozata úgy, hogy minden $n \in \omega$-re $U_n \supseteq D_n$, és

$$\bigcap_{n \in \omega} U_n = \emptyset.$$

- Minden Q-tér egyben Δ-tér is.

Δ-terek

Definition

Egy topologikus teret Δ-térnek nevezünk, ha minden olyan $\{D_n : n \in \omega\}$ csökkenő részhalmazsorozathoz amelynek metszete üres, létezik nyílt részhalmazoknak egy csökkenő $\{U_n : n \in \omega\}$ sorozata úgy, hogy minden $n \in \omega$-re $U_n \supseteq D_n$, és

$$\bigcap_{n\in\omega} U_n = \emptyset.$$

- Minden Q-tér egyben Δ-tér is.
  - Ha X egy nem-σ-diszkrét T_1 Q-tér, akkor az ugynevezett *Alexandroff-duplikáltja*, egy Δ-tér, de nem Q-tér.

Baire Δ-terek és egy mértékelméleti probléma

- A következő probléma [1] és [2] cikkekben szerepelt: *Létezik-e izolált pont nélküli (zsufi) Baire Δ-tér?*

Baire Δ-terek és egy mértékelméleti probléma

- A következő probléma [1] és [2] cikkekben szerepelt: *Létezik-e izolált pont nélküli (zsufi) Baire Δ-tér?*

Tétel (Juhász, van Mill, Soukup és Szentmiklóssy 25' [3])

Ha létezik zsufi Baire T_1 Δ-tér, akkor van egy belső modell, amely tartalmaz egy mérhető számosságot.

Baire Δ-terek és egy mértékelméleti probléma

- A következő probléma [1] és [2] cikkekben szerepelt: *Létezik-e izolált pont nélküli (zsufi) Baire Δ-tér?*

Tétel (Juhász, van Mill, Soukup és Szentmiklóssy 25' [3])

Ha létezik zsufi Baire T_1 Δ-tér, akkor van egy belső modell, amely tartalmaz egy mérhető számosságot.

- [2]-ben a szerzők a fenti probléma mértékelméleti analógiáját kérdezik: *Igaz-e, hogy ha X-en létezik szigorúan pozitív, σ-additív, pontokon eltűnő mérték, akkor X nem Δ-tér?*

Baire Δ-terek és egy mértékelméleti probléma

- A következő probléma [1] és [2] cikkekben szerepelt: *Létezik-e izolált pont nélküli (zsufi) Baire Δ-tér?*

Tétel (Juhász, van Mill, Soukup és Szentmiklóssy 25' [3])

Ha létezik zsufi Baire T_1 Δ-tér, akkor van egy belső modell, amely tartalmaz egy mérhető számosságot.

- [2]-ben a szerzők a fenti probléma mértékelméleti analógiáját kérdezik: *Igaz-e, hogy ha X-en létezik szigorúan pozitív, σ-additív, pontokon eltűnő mérték, akkor X nem Δ-tér?*
- Szigorúan pozitív: minden nemüres nyílt halmaz pozitív mértékű.

Baire Δ-terek és egy mértékelméleti probléma

- A következő probléma [1] és [2] cikkekben szerepelt: *Létezik-e izolált pont nélküli (zsufi) Baire Δ-tér?*

Tétel (Juhász, van Mill, Soukup és Szentmiklóssy 25' [3])

Ha létezik zsufi Baire T_1 Δ-tér, akkor van egy belső modell, amely tartalmaz egy mérhető számosságot.

- [2]-ben a szerzők a fenti probléma mértékelméleti analógiáját kérdezik: *Igaz-e, hogy ha X-en létezik szigorúan pozitív, σ-additív, pontokon eltűnő mérték, akkor X nem Δ-tér?*
- Szigorúan pozitív: minden nemüres nyílt halmaz pozitív mértékű.
- Ha megengedjük a végtelen mértékű halmazokat, akkor vannak ellenpéldák (sőt Q-tér példa is), ezért a problémát *valószínűségi mértékekre* megfogalmazva vizsgáltuk.

A fő eredmény

Tétel (I., Székely '26)

A következő állítások ekvikonzisztensek:

A fő eredmény

Tétel (I., Székely '26)

A következő állítások ekvikonzisztensek:

(1) Létezik mérhető számosság;

A fő eredmény

Tétel (I., Székely '26)

A következő állítások ekvikonzisztensek:

(1) Létezik mérhető számosság;

(2) Létezik zsufi Baire T_1 Δ-tér;

A fő eredmény

Tétel (I., Székely '26)

A következő állítások ekvikonzisztensek:

(1) Létezik mérhető számosság;

(2) Létezik zsufi Baire T_1 Δ-tér;

(3) Létezik zsufi Baire T_4 Q-tér;

A fő eredmény

Tétel (I., Székely '26)

A következő állítások ekvikonzisztensek:

(1) Létezik mérhető számosság;

(2) Létezik zsufi Baire T_1 Δ-tér;

(3) Létezik zsufi Baire T_4 Q-tér;

(4) Létezik olyan T_1 Δ-tér, amelyen van szigorúan pozitív, pontokon eltűnő valószínűségi mérték;

A fő eredmény

Tétel (I., Székely '26)

A következő állítások ekvikonzisztensek:

(1) Létezik mérhető számosság;

(2) Létezik zsufi Baire T_1 Δ-tér;

(3) Létezik zsufi Baire T_4 Q-tér;

(4) Létezik olyan T_1 Δ-tér, amelyen van szigorúan pozitív, pontokon eltűnő valószínűségi mérték;

(5) Létezik olyan T_3 Q-tér, amelyen van szigorúan pozitív, pontokon eltűnő valószínűségi mérték.

A fő eredmény

Tétel (I., Székely '26)

A következő állítások ekvikonzisztensek:

(1) Létezik mérhető számosság;
(2) Létezik zsufi Baire T_1 Δ-tér;
(3) Létezik zsufi Baire T_4 Q-tér;
(4) Létezik olyan T_1 Δ-tér, amelyen van szigorúan pozitív, pontokon eltűnő valószínűségi mérték;
(5) Létezik olyan T_3 Q-tér, amelyen van szigorúan pozitív, pontokon eltűnő valószínűségi mérték.

- A tétel bizonyításának vázlata a következő. A $Con(2) \implies Con(1)$ implikációt [3, Corollary 3.2] bizonyította. Továbbá a $(3) \implies (2)$ és $(5) \implies (4)$ implikációk triviálisak.

A bizonyítás vázlata I.

(1) Létezik mérhető számosság;
(3) Létezik sűrű Baire T_4 $\mathbb{Q}$-tér;
(5) Létezik olyan T_3 $\mathbb{Q}$-tér, amelyen van szigorúan pozitív, pontokon eltűnő valószínűségi mérték.

- A $Con(1) \implies Con(3)$ irányhoz feltesszük, hogy κ mérhető számosság, és hozzá adunk a V alapmodellhez κ darab Cohen valóst. Ekkor $V[G]$-ben, egy κ-n vett precipitous ideal segítségével defininiálható egy zsufi Baire T_4 Q-tér.

A bizonyítás vázlata I.

(1) Létezik mérhető számosság;

(3) Létezik sűrű Baire T_4 $\mathbb{Q}$-tér;

(5) Létezik olyan T_3 $\mathbb{Q}$-tér, amelyen van szigorúan pozitív, pontokon eltűnő valószínűségi mérték.

- A $Con(1) \implies Con(3)$ irányhoz feltesszük, hogy κ mérhető számosság, és hozzá adunk a V alapmodellhez κ darab Cohen valóst. Ekkor $V[G]$-ben, egy κ-n vett precipitous ideal segítségével defininiálható egy zsufi Baire T_4 Q-tér.
- A $Con(1) \implies Con(5)$ irányhoz hasonlóan járunk el, azzal a különbséggel, hogy most κ darab random valósat adunk hozzá.

A bizonyítás vázlata II.

(1) Létezik mérhető számosság;

(4) Létezik olyan T_1 Δ-tér, amelyen van szigorúan pozitív, pontokon eltűnő valószínűségi mérték.

- Végül a $Con(4) \implies Con(1)$ irányhoz a következő mértékelméleti tételt bizonyítjuk, amely önmagában is érdekes, és amelyből az implikáció könnyen következik.

A bizonyítás vázlata II.

(1) Létezik mérhető számosság;

(4) Létezik olyan T_1 Δ-tér, amelyen van szigorúan pozitív, pontokon eltűnő valószínűségi mérték.

- Végül a $Con(4) \implies Con(1)$ irányhoz a következő mértékelméleti tételt bizonyítjuk, amely önmagában is érdekes, és amelyből az implikáció könnyen következik.

Tétel (I., Székely '26)

Tegyük fel, hogy nincs valós értékűen mérhető számosság, és legyen μ egy σ-véges (nem azonosan nulla) mérték az X téren, amely eltűnik a pontokon. Ekkor léteznek végtelen sok, páronként diszjunkt részhalmazai X-nek, amelyek teljes külső mértékűek.

Hivatkozások

Kakol, J., Leiderman, A., Tkachuk, V. V.
Some applications of the Δ_1-property.
Topology and its Applications (2025): 109507.

Leiderman, A., and Szeptycki, P.
On Δ-spaces.
Israel Journal of Mathematics (2025): 1–30.

Juhász, I., van Mill, J., Soukup, L., Szentmiklóssy, Z.
Some new results on Δ-spaces.
arXiv preprint arXiv:2510.04242 (2025).

Köszönöm a figyelmet!