

Cayley-gráfok sajátértékei

Györgypál Tamás

Témavezető: Somlai Gábor

- **Definíció:** A G csoportot parkettázza az $A \subset G$ halmaz, ha létezik egy $B \subset G$ parkettázó párja úgy, hogy bármely $g \in G$ elem egyértelműen írható fel $g = ab$ alakban, ahol $a \in A$ és $b \in B$.

- **Definíció:** A G csoportot parkettázza az $A \subset G$ halmaz, ha létezik egy $B \subset G$ parkettázó párja úgy, hogy bármely $g \in G$ elem egyértelműen írható fel $g = ab$ alakban, ahol $a \in A$ és $b \in B$.
- S : egy szimmetrikus generátorhalmaza a G véges csoportnak.
- $\text{Cay}(G, S)$: a G csoport S szerinti Cayley-gráfja.
- A : $\text{Cay}(G, S)$ szomszédsági mátrixa.
- ρ : a G csoport reguláris reprezentációja.

- Ezekkel a jelölésekkel $A = \sum_{s \in S} \rho(s)$.

- Ezekkel a jelölésekkel $A = \sum_{s \in S} \rho(s)$.
- $\rho = \bigoplus_{\varphi \in \widehat{G}} \underbrace{\varphi \oplus \cdots \oplus \varphi}_{d_\varphi}$, ahol d_φ a φ irreducibilis reprezentáció dimenziója.

Csoportok parkettázása

- Ezekkel a jelölésekkel $A = \sum_{s \in S} \rho(s)$.
- $\rho = \bigoplus_{\varphi \in \widehat{G}} \underbrace{\varphi \oplus \cdots \oplus \varphi}_{d_\varphi}$, ahol d_φ a φ irreducibilis reprezentáció dimenziója.
- Ha $M \subset G$ olyan, hogy bármely φ irreducibilis reprezentációra a $\sum_{m \in M} \varphi(m)$ mátrixnak csak nullától különböző sajátértéke van, akkor M nem parkettáz, mert ha létezne egy B parkettázó párja, akkor a csoportalgebrák nyelvén

$$\left(\sum_{m \in M} m \right) \left(\sum_{b \in B} b \right) = \sum_{g \in G} g \implies \left(\sum_{m \in M} \varphi(m) \right) \left(\sum_{b \in B} \varphi(b) \right) = \sum_{g \in G} \varphi(g),$$

viszont bármely φ nem triviális reprezentációra $\sum_{g \in G} \varphi(g) = 0 \implies \sum_{b \in B} \varphi(b) = 0$.

Wedderburn-Artin tétel $\implies \sum_{b \in B} b = 0$.

- Selberg [1] vagy Bourgai-Gamburd [2] eredményei alapján a $(Cay(SL(2, p), S))_p$ expandert alkot, ahol

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Selberg [1] vagy Bourgai-Gamburd [2] eredményei alapján a $(Cay(SL(2, p), S))_p$ expandert alkot, ahol

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Nemrég Sanming Zhou és Binzhou Xia megkérdezte, hogy mely prímszámokra parakkéta S az $SL(2, p)$ csoportot.

- Az $SL(2, p)$ csoport irreducibilis reprezentációit két részre szokták osztani.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} k & u \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{F}_p, k \in \mathbb{F}_p^\times \right\}$$

- Az $SL(2, p)$ csoport irreducibilis reprezentációit két részre szokták osztani.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} k & u \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{F}_p, k \in \mathbb{F}_p^\times \right\}$$

- ψ_j a B egy karaktere ($0 \leq j \leq p-2$), amit a következőképpen definiálunk

$$\psi_j \left(\begin{pmatrix} k & u \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix} \right) = \omega^{jk},$$

ahol $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p-1}}$. Ezekből a karakterekből (reprezentációkból) indukáljuk $SL(2, p)$ -nek a φ_{ψ_j} principal seriesbe tartozó reprezentációit.

- **Theorem:** ([3] Theorem 2.1.)

- 1 Legyen ψ_j és ψ_l irreducibilis reprezentációi az \mathbb{F}_p^\times csoportnak. Tegyük fel, hogy $\psi_j^2, \psi_l^2 \neq 1$, ekkor φ_{ψ_j} és φ_{ψ_l} is irreducibilis ($p+1$ dimenziós) reprezentációk. Továbbá, φ_{ψ_j} és φ_{ψ_l} ekvivalensek akkor és csakis akkor, ha $\psi_j = \psi_l$ vagy $\psi_j^{-1} = \psi_l$.
- 2 Ismert, hogy $\psi_{\frac{p-1}{2}}$ az egyetlen nem triviális kvadratikus karaktere \mathbb{F}_p^\times -nek, azaz $\psi_{\frac{p-1}{2}}^2 = 1$. Az indukált reprezentációja két nem ekvivalens irreducibilis reprezentációra hasad, és mindkettő $\frac{p+1}{2}$ dimenziós.
- 3 φ_1 egy p dimenziós és a triviális reprezentációra hasad szét.

- Ezekben a reprezentációkban a csoport elemeinek hatásai megfeleltethetők Möbius-transzformációknak a projektív egyenesen.

$$\varphi_\psi(s_1), \varphi_\psi(s_1^{-1}), \varphi_\psi(s_2), \varphi_\psi(s_2^{-1}) : \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p),$$

$$x \xrightarrow{\varphi_\psi(s_1)} x+1, \quad x \xrightarrow{\varphi_\psi(s_1^{-1})} x-1,$$

$$x \xrightarrow{\varphi_\psi(s_2)} \begin{cases} \psi(1+x) \cdot \frac{x}{1+x} & \text{if } x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \setminus \{-1, \infty\} \\ \psi(-1) \cdot \infty & \text{if } x = -1 \\ 1 & \text{if } x = \infty \end{cases},$$

$$x \xrightarrow{\varphi_\psi(s_2^{-1})} \begin{cases} \psi(1-x) \cdot \frac{x}{1-x} & \text{if } x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \setminus \{1, \infty\} \\ \infty & \text{if } x = 1 \\ \psi(-1) & \text{if } x = \infty \end{cases}.$$

- Például $p = 3$ esetén a generátorelemeink mátrixai és azok összegei a következők:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \psi(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi(2) & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

és az összegük

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 + \psi(2) & 1 \\ 1 & 1 + \psi(2) & 0 & \psi(2) \\ 0 & 1 & \psi(2) & 2 \end{pmatrix}.$$

- A discrete seriesbeli reprezentációk megkonstruálását most nem részletezzük ([3] Theorem 2.3.), de az összegmátrix a következőképpen néz ki

$$\left((\varepsilon^x + \varepsilon^{-x}) \cdot \delta_{x,y} - (\theta(-1)\varepsilon^{x+y} + \varepsilon^{-(x+y)}) \cdot \frac{1}{p} \sum_{u \in T_1} \theta(u) \cdot \varepsilon^{\text{Tr}(v_y \cdot \bar{v}_x \cdot u)} \right)_{x,y},$$

ahol T_1 az 1 normájú elemei \mathbb{F}_{p^2} testnek ($\mathcal{N}(x) = x^{p+1}$), θ a T_1 egy nemtriviális karaktere (ismert, hogy $T_1 \cong Z_{p+1}$) és $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$.

| Principal Series | | Discrete Series | |
|------------------------|-------------|------------------------|-------------|
| Character | Determinant | Character | Determinant |
| Trivial ($k = 0$) | -64 | Order 8 ($k = 1, 7$) | 4 |
| Order 6 ($k = 1, 5$) | 64 | Order 4 ($k = 2, 6$) | 4 |
| Order 3 ($k = 2, 4$) | -64 | Order 8 ($k = 3, 5$) | 4 |
| Quadratic ($k = 3$) | 4 | Quadratic ($k = 4$) | 36 |

Sejtés 1: Legyen $p \geq 3$ egy tetszőleges prím. Egy, a principal seriesbeli reprezentáció esetén ami Z_{p-1} egy maximális rendű karakterből lett indukálva, az összegmátrix determinánása

$$2^{2\lfloor \frac{p}{6} \rfloor + 4}.$$

Sejtés 2: Legyen $p \geq 3$ egy tetszőleges prím. Egy, a discrete seriesbeli reprezentáció esetén ami Z_{p+1} egy maximális rendű karakterből lett indukálva, az összegmátrix determinánása

$$2^{2\lfloor \frac{p}{6} \rfloor}.$$

- [1] Selberg, A., *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* (pp. 1-15). American Mathematical Society 1965.
- [2] Bourgain, J. and Gamburd, A., *Uniform expansion bounds for Cayley graphs*, of. *Annals of Mathematics*, 2008, pp.625-642.
- [3] Lafferty, J.D. and Rockmore, D., *Fast Fourier analysis for SL_2 over a finite field and related numerical experiments*, *Experimental Mathematics* 1992, 1(2), pp.115-139.

Köszönöm a figyelmet!