Gömbök kifordítása

Györgypál Gergő

Témavezető: Dr. Fehér László

2026.06.03.

Legyen M és N két darab differenciálható sokaság. Az $f : M \to N$ differenciálható leképezés immerzió ha

$$D_m f : T_m M \to T_{f(m)} N$$

injektív $\forall m \in M$-re.

Ha f és g két darab immerzió az M és az N között. Azt mondjuk, hogy az f és g regulárisan homotópok ha létezik egy

$$H : M \times [0,1] \to N$$

homotópia ami minden $t \in [0,1]$ koordinátában egy immerzió, valamint igaz az, hogy $H(m,0) = f(m), \forall m \in M$ és $H(m,1) = g(m), \forall m \in M$. Egy ilyen homotópiát reguláris homotópiának nevezünk.

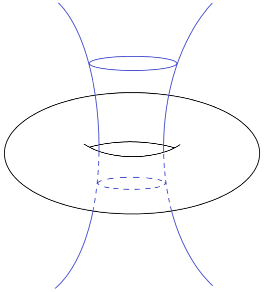
Vegyük a k-dimenziós gömbfelületet S^k-át és ágyazzuk be $\mathbb{R}^n$-be. Ennek a kifordításán egy olyan reguláris homotópiát értünk ($H : S^k \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$) amire igaz, hogy $H(x,0)$ az S^k standard beágyazás $\mathbb{R}^n$-be és H(x, 1) szintén az S^k beágyazása de ellentétes irányítással.

Ha a feladatunk az lenne, hogy az S^2-őt $\mathbb{RP}^3$-ban fordtsuk ki akkor nem lenne nehéz dolgunk mert tudjuk, hogy $\mathbb{RP}^3$ megkonstruálható egy B^3-ból úgy, hogy ráragasztunk egy csavart szakasznyalábot.

Nézzük az S^3 standard 1 génuszú Heegaard felbontását. Tekintsük S^3-ra úgy mint a $\mathbb{C}^2$ egységgömbjére.

$$S^3 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \mid \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1\}$$

Az $\alpha\overline{\alpha} = \beta\overline{\beta}$ részhalmaza az S^3-nak egy tóruszt ír le ami mentén ragad össze az a két tömör tórusz amik a Heegaard felbontását adják az S^3-nak. Ez az úgynevezett Clifford tórusz (CT).



A két darab tömör tórusz belső köreinek a paraméterezése a következő:

$$\{(e^{i\phi}, 0)\}, \{(0, e^{i\psi})\}$$

Definiáljuk a következő hatást az S^3-on:

$$e_{\mathrm{Hopf}} : S^3 \to S^3$$

$$e^{i\theta}_{\mathrm{Hopf}}(\alpha, \beta) = (e^{i\theta}\alpha, e^{i\theta}\beta)$$

A kifordításunk egy kis gömbbel $\overline{S}_*$ kezdődik az egyik tömör tórusz belsejében. Ezt felfújjuk egészen addig amíg eléri CT-t ($\overline{S}_0$).
Ezek után tovább fújjuk a gömbünket ezzel felbontva őt három darab komponensre:

$$\overline{S}^*_\psi = \overline{D}^2_\psi \cup \overline{A}^*_\psi \cup \overline{D}^2_{-\psi}$$

Ezek a gömbök realizálnak egy kifordítást $\mathbb{RP}^3$-ban.

Módosítjuk a kifordításunkat a Hopf folyammal, valamint egy reparametrizációval.
Az előbbiekben bemutattot felbontásban szereplő korongokat és annulusokat a következőképpen mozgatjuk:

$$D_\psi^h = e_{\mathrm{Hopf}}^{i\psi} D_\psi^*, A_\psi^h = e_{\mathrm{Hopf}}^{i\psi} A_\psi^*$$

Az első tömör tóruszunkon végrehajtunk egy átparaméterezést úgy, hogy a Hopf folyam a következőképpen módosuljon:

$$e_{\mathrm{Hopf}}^{i\theta}(\alpha, \beta) = (e^{i\theta}\alpha, \beta)$$

Köszönöm a figyelmet!