Projektív algebrai sík görbék

Benedek Sára | Témavezető: Némethi Anrdás ELTE, 2026. június. 3.

Bevezető

Az egyik legegyszerűbb nem-triviális polinomiális egyenlet megoldáshalmazával foglalkozunk. Legyen $f \in \mathbb{C}[x, y]$:

$$V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

Homogenizálással, egy algebrai görbét a projektív síkban globálisan vizsgálhatunk. Az f-hez tartozó projektív algebrai sík görbe:

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{CP}^2 \mid F(x, y, z) = 0\}$$

Görbéket tanulmányozva felmerülnek geometriai kérdések, melyeket az algebra segít megválaszolni.

Lokális tulajdonságok

Definíció

Legyen $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ közös irreducilbilis komponens nélkül. Ekkor az O pontban f és g *metszetmultiplicitása*: $i_O(f, g) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[x,y]]}{(f,g)}$.

Definíció

Legyen $P \in C$.

- Legyen $T_P C$ az érintő P-ben. P *inflexiós pont*, ha $i_P(T_P C, C) \geq 3$.
- P *sima* pontosan akkor, ha $(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)) \neq (0, 0)$. Különben P *szinguláris*.
- $f(P) \overset{Taylor}{=} f_0 + f_1(P) + f_2(P) + \ldots$. Az m egész számot az f *multiplicitásának nevezzük P-ben*, ha teljesül, hogy $f_m(P) \neq 0$ és $f_i(p) = 0$, minden $i < m$.

Bézout-tétel

Tétel

Legyen F, G két homogén polinom, melyek nullahalmaza C, D síkgörbék közös komponens nélkül. Legyen $c := deg(C), d := deg(D)$. Ekkor $\sum\limits_{P \in C \cap D} i_P(F, G) = c \cdot d.$

Következmények

1. Ha C és D $c \cdot d$ különböző pontban metszik egymást, akkor ezek a pontok simák mindkét görbén, valamint a metszések transzverzálisak.
2. Ha C és D több mint $c \cdot d$ pontban metszi egymást, akkor a két görbének van közös komponense.

Bézout-tétel néhány alkalmazása

- Minden kónikus, azaz másodrendű komplex projektív görbe topológiailag megegyezik a Riemann-gömbbel.
- **Első hasadási tétel**: C,D n-ed rendű projektív görbék közös komponens nélkül. $C \cap D = \{P_1, \ldots, P_{n^2}\}$. Ha létezik egy E projektív irreducibilis $n > e$-ed rendű görbe, ú.h. $P_1, \ldots, P_{e \cdot n} \in E$, akkor létezik egy ($n$-$e$)-ed rendű F projektív görbe, ú.h. $P_{e \cdot n+1}, \ldots, P_{n^2} \in F$.
- **Pappus-tétel**: L_1, L_2 egyenesek, $P_1, P_2, P_3 \in L_1$ és $Q_1, Q_2, Q_3 \in L_2$ a két egyenes metszéspontjain kívül esnek. L_{ij} P_i-t és Q_j-ét összekötő egyenesek, valamint $R_k = L_{ij} \cap L_{ji}$. Ekkor R_1, R_2, R_3 kollineárisak.
- **Pascal-tétel**: Legyen C egy kónikus, irreducibilis görbe. Választunk rajta hat különböző pontot, melyek egy hatszög csúcsait adják. A hatszög szembenfekvő éleinek metszéspontjai kollineárisak.

Csoportstruktúra harmadrendű sima görbéken

Legyen $O \in C$ rögzített. A csoportműveletet: $\oplus : C \times C \to C$. Jelöljük L_{AB}-val az A és B pontokon áthaladó egyenest. Ha $A = B$, akkor $L_{AB} = T_A C$. Ez az egyenes a görbét egy harmadik pontban metszi, amelyet P-vel jelölünk. Az L_{OP} és a görbe harmadik metszéspontja lesz az $A \oplus B$.
Legyen $K \in C$ a következőképpen megadva: $T_O C \cap C = \{O, O, K\}$.

- Ha D egy d-ed rendű görbe és $C \cap D = \{P_1, \ldots, P_{3d}\}$, akkor $\bigoplus_{i \in \{1,\ldots,3d\}} P_i = K^{\oplus d}$.
- Ha O inflexiós pont, akkor $K = O$.
- Ha O inflexiós pont, $I \in C$ infelxiós, pontosan akkor ha $I^{\oplus 3} = O$.
- Az inflexiós pontok halmaza részcsoportot alkot $(C, O, \oplus)$-ben, és izomorf $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$-mal.

Divizorok

- $Div(C) = \mathbb{Z}\langle P\rangle_{P\in C} = \{\underbrace{\sum}_{\text{véges összeg}} n_iP_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in C\}$.
- Egy divizor foka $\sum n_i$. A $deg: Div(C) \to \mathbb{Z}$ szürjektív homomorfizmus és magja: $Div^0(C) = \{D \in DivC \mid deg(D) = 0\}$.
- Egy divizor *principális*, ha egy nem nulla racionális függvény divizora. $Prin(C) = \{div(f) \mid f$ nem nulla és racionális$\}$, ahol *div* csoporthomomorfizmus $(K^*(C), \cdot)$ és $(Div(C), +)$ között.
- A $DivCl(C) := \frac{Div(C)}{Prin(C)}$ faktorcsoportot C *divizor osztálycsoportjának* nevezzük.
- $deg : DivCl(C) \to \mathbb{Z}$ magja: $DivCl^0(C) = \frac{Div^0(C)}{Prin(C)}$.
- Ha C harmadrendű sima görbe, $O \in C$ rögzített, akkor $(DivCl^0(C), +) \xrightarrow{\sim} (C, O, \oplus)$.

Nyilatkozat a mesterséges intelligencia eszközök használatáról

Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen az oktatásban alkalmazott mesterséges intelligencia használatáról szóló 4/2025. (X. 28.) számú rektori utasításnak értelmében elismerem, hogy a jelen projekt során mesterséges intelligenciát

- a szöveg szerkesztésére, helyesírási és nyelvtani hibáinak javítására, valamint
- a prezentáció stílusának és elrendezésének testreszabásában vettem igénybe.

Minden eredményt ellenőriztem, és a végleges változat továbbra is az én saját munkám eredménye.