Beszámoló projektmunka

Szabó Eszter
Témavezető: Jüttner Alpár

December 2020

1. Bevezetés

Az Önálló projektmunka tárgy keretein belül ebben a félévban a kiegyensúlyozott szubmoduláris folyamok keresésével és teljes párosítások, valamint T-kötések pakolásával foglalkoztam.A félév első felében megismertem Barahona optimális tört T-kötés pakolásra vonatkozó algoritmusát, valamint igyekeztem átalakítani az algoritmus teljes párosítás pakolására. A félév második felében a kiegyensúlyozott szubmoduláris folyamok problémájával foglalkoztam, valamint a kiegyensúlyzott folyamokhoz hasonló problémákkal. (Például ha a kiegyensúlyozást csak bizonyos élekre szeretnénk megkövetelni vagy példaul ha az optimumot a maximum norma szerint keressük.)

2. Kiegyensúlyozott szubmoduláris folyam

Adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf, valamint minden $X \subseteq V$ csúcshalmazra egy $b(X)$ teljesen szubmoduláris korlátozó függvény. Egy folyam a gráfban szubmoduláris, ha minden $X \subset V$-re teljesül, hogy a halmazba belépő és kilépő éleken az összfolyamértékek különbsége legfeljebb $b(X)$. Keressünk olyan szubmudoláris folyamot a gráfban, amire a maximális és minimális folyamérték különbsége minimális.

Vagyis a feladat a következő:

$$\begin{aligned}
&\min(\max\{x_e\} - \min\{x_e\}) \\
&\sum_{e\in\rho(X)} x_e - \sum_{e\in\delta(X)} x_e \le b(X) \qquad\qquad \forall X \subset V \\
&x \ge 0
\end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $y = \min_E\{x_e\}$, $z = \max_E\{x_e\}$, $\delta = z - y$. Ekkor az éleket tekinthetjük úgy, mintha alapból folyna rajta egy y értékű áram. Ez definiál egy új $b'(X) = b(X) - \rho(X)y + \delta(X)y$ igényt minden csúcshalmazra.
$b'(X)$ is teljesen szubmoduláris:

$$\begin{aligned}
&\forall X, Y \subset V: \\
&b'(X) + b'(Y) = b(X) - \rho(X)y + \delta(X)y + b(Y) - \rho(Y)y + \delta(Y)y = \\
&= b(X) + b(Y) - \rho(X \cup Y)y - \rho(X \cap Y)y + \delta(X \cup Y)y + \delta(X \cap Y)y \ge \\
&\ge b(X \cup Y) + b(X \cap Y)y - \rho(X \cup Y)y + \delta(X \cup Y)y - \rho(X \cap Y)y + \delta(X \cap Y)y = \\
&= b'(X \cup Y) + b'(X \cap Y)
\end{aligned}$$

A feladat következőképpen fogalmazható át:

$$\max -\delta$$

$$\sum_{e\in\rho(X)} x_e - \sum_{e\in\delta(X)} x_e \leq b'(X) \qquad \forall X \subset V$$

$$x \leq \delta$$

$$x \geq 0$$

Nézzük ennek a feladatnak a duálisát:

$$\min \sum_{Z\subset V} y_Z b'(Z)$$

$$\sum_{e\in\rho(Z)} y_Z - \sum_{e\in\delta(Z)} y_Z + y_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

$$\sum_{e\in E} -y_e \geq -1$$

$$y_e, y_Z \geq 0 \qquad \forall e \in E, Z \subset V$$

Ennek a feladatnak az $y \equiv 0$ megengedett megoldása, ezért az optimum biztosan nem pozitív. A duális feladat optimális megoldásai megegyeznek a következő feladat optimális megoldásaival:

$$\min \frac{\sum_{Z\subset V} y_Z b'(Z)}{\sum_{e\in E} y_e}$$

$$y_e \geq \sum_{e\in\delta(Z)} y_Z - \sum_{e\in\rho(Z)} y_Z \qquad \forall e \in E$$

$$\sum_{e\in E} y_e > 0$$

$$y_e, y_Z \geq 0 \qquad \forall e \in E, Z \subset V$$

Legyen a duális feladat egy optimális megoldása y^*, készítsünk ebből az átalakított feladatnak egy megengedett megoldását, aminek a célfüggvényértéke megegyezik a duális feladat optimumával.
Ha y^*-ban $\sum_{e\in E} y^*_e = 0$, akkor egy tetszőleges e élén y^*_e értékét 1-vel megnövelve egy ugyanolyan értékű, megengedett megoldást kapunk. Ez az átalakított y^* az átalakított duális feladatnak is megoldása.
Ha y^*-ban $0 < \sum_{e\in E} y^*_e \leq 1$, akkor az y^* vektort elosztva $\sum_{e\in E} y^*_e$-vel szintén megengedett megoldást kapunk, aminek az értéke $\leq$ az eredeti y^* értékénél. Mivel y^* optimális volt, így e két megoldás értékének meg kell egyeznie. Tehát kapunk egy ugyanolyan értékű megoldást, ami már az átalakított feladatnak is ugyanolyan értékű megoldása. (Mivel ekkor $\sum_{e\in E} y_e = 1$.)

Legyen az átalakított feladat egy optimális megoldása y', készítsünk ebből az duális feladatnak egy megengedett megoldását, aminek a célfüggvényértéke megegyezik az átalakított feladat optimumával.
Ekkor az y' vektort megszorozva $\frac{1}{\sum_{e\in E} y_e}$-vel a duális és az átalakított faladatnak is egy megengedett megoldását kapjuk, amiknek az optimum értéke megegyezik.

A fentiekből következik, hogy a duális feladatban az optimális megoldásban feltehetjük, hogy $\sum_{e\in E} y^*_e = 0$ vagy $\sum_{e\in E} y^*_e = 1$. Ha $0 < \sum_{e\in E} y^*_e < 1$, akkor a $\sum_{e\in E} y^*_e$-vel elosztva egy nem rosszabb megoldáshoz jutunk, amiben már $\sum_{e\in E} y^*_e = 1$.

Ha $\sum_{e\in E} y^*_e = 0$ és $y^* b < 0$, akkor a duális feladat nem korlátos. Ekkor ugyanis ki tudunk választani néhány csúcshalmazt a gráfból, hogy az összsúlyuk negatív és $\forall e \in E$-re $y^*_e = 0$. Ezt

a megoldást egy tetszőleges $c > 0$ számmal szorozva továbbra is megengedett megoldást kapunk, aminek a célfüggvényértéke is c-szerese. Így tetszőleges kicsi célfüggvényértékű duál megengedett megoldást tudunk készíteni.
Ekkor nincs primál megoldás, azaz nincs szubmoduláris folyam a gráfban b'-re. Nézzük a duálisban előbb említett halmazok unióját. Ebből az unióból nem léphet ki él, különben arra az élre az $y^*_e > 0$, ami nem lehet $\sum_{e \in E} y^*_e = 0$ feltétel miatt.

Ha $\sum_{e \in E} y^*_e = 0$ és $y^* b = 0$, akkor nincs olyan $Z \subset V$, amire $b'(Z) < 0$, különben őt kiválasztva kapnánk egy negatív értékű megoldást. Tehát ekkor $b(Z)' \geq 0 \ \forall Z \subset V$, vagyis az $x \equiv 0, \delta = 0$ megengedett és optimális megoldása a primál feladatnak.

Vizsgáljuk most az átalakított duál feladatot, aminek az optimális megoldásai megfelelnek a duál feladat optimális megoldásainak. Ez a feladat a következőképpen fogalmazható át: a gráf csúcsainak kiválasztunk néhány részhalmazát. A Z részhalmazt y_Z súllyal választjuk. Ekkor minden $e \in E$ élre számoljuk ki az $y_e = (\sum_{e \in \delta(Z)} y_Z - \sum_{e \in \rho(Z)} y_Z)^+$, ahol $(x)^+$ jelöli az x pozitív részét. Ha ekkor $\sum_{e \in E} y_e = 0$, akkor az előbbiek miatt a primál feladat vagy nem oldható meg vagy van triviális megoldása.

Tegyük fel, hogy a primál feladatnak van nem triviális megoldása, azaz $\exists Z \subset V : b'(Z) < 0$ és $\forall Z' \subset V : b'(Z') \geq 0$ vagy $\delta(Z') > 0$. Ekkor olyan halmazrendszert keresünk, amire $\min \frac{\sum_{Z \subset V} y_Z b'(Z)}{\sum_{e \in E} y_e}$ minimális.
Nézzük a kiválasztott halmazrendszert:
Ha van közöttük X, Y metsző halmazok, amikre $y_X, y_Y > 0$, akkor b' teljesen szubmodularításából következik, hogy kikeresztezhetjük őket:
$b'(X) + b'(Y) \geq b'(X \cup Y) + b'(X \cap Y)$ és $\delta(X) + \delta(Y) \geq \delta(X \cap Y) + \delta(X \cup Y)$
Tehát $y_{X \cup Y}, y_{X \cap Y}$ súlyait növeljük meg $\min\{y_X, y_Y\}$-vel, y_X, y_Y súlyait pedig csökkentsük ugyanennyivel. Ez ugyanúgy megengedett megoldás marad és célfüggvény értéke nem nőtt.
Tehát feltehetjük, hogy a kiválasztott halmazrendszer lamináris. (A Z halmazt akkor nevezzünk kiválasztottnak, ha $y_Z > 0$.)

Ha van a kiválasztott halmazok között két X, Y diszjunkt halmaz, akkor őket helyettesíthetjük az uniójukkal:
$b'(X) + b'(Y) \geq b'(X \cap Y) + b'(\emptyset)$
$b'(\emptyset) > 0$, különben őt tetszőlegesen sokszor bevéve a halmazrendszerbe egy tetszőlegesen kicsi megoldását kapjuk a duálisnak.(Ekkor a duális nem korlátos.)
Tehát $y_{X \cup Y}, y_{X \cap Y}$ súlyait növeljük meg $\min\{y_X, y_Y\}$-vel, y_X, y_Y súlyait pedig csökkentsük ugyanennyivel. Ez ugyanúgy megengedett megoldás marad és célfüggvény értéke nem nőtt. Tehát feltehetjük, hogy a halmazrendszer olyan halmazokokból áll, hogy bármely kettő közül az egyik tartalmazza a másikat.

Ekkor $\forall e \in E$-re $y_e =$ azon halmazok számával, amiből kilép az e él, mivel a halmazrendszer "egymást tartalmazó" halmazokból áll. Ekkor nincs olyan él, ami az egyik kiválasztott halmazból kilép, egy másikba pedig belép. Azaz $\sum_{e \in E} y_e = \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \delta(Z)$.
Legyen X, Y két kiválasztott halmaz, $Y \subset X$ és a következőt szeretnénk belátni:

$$\frac{b(X)y_X + b(Y)y_Y}{\delta(X)y_X + \delta(Y)y_Y} \geq \frac{b(X)y_X}{\delta(X)y_X}$$

vagy

$$\frac{b(X)y_X + b(Y)y_Y}{\delta(X)y_X + \delta(Y)y_Y} \geq \frac{b(Y)y_Y}{\delta(Y)y_Y}$$

Tegyük fel indirekt, hogy ez nem teljesül, azaz $\frac{b(X)y_X + b(Y)y_Y}{\delta(X)y_X + \delta(Y)y_Y} < \frac{b(X)y_X}{\delta(X)y_X}$ és $\frac{b(X)y_X + b(Y)y_Y}{\delta(X)y_X + \delta(Y)y_Y} \geq \frac{b(Y)y_Y}{\delta(Y)y_Y}$.

Átszorozva kapjuk: $b(Y)y_Y\delta(X)y_X < b(X)y_X\delta(Y)y_Y$ és $b(Y)y_Y\delta(X)y_X > b(X)y_X\delta(Y)y_Y$. Ez ellentmondás, ezért a fenti 2 lehetőség közül valamelyik teljesül.

Ezután vegyük a $\mathcal{Z}$ halmazrendszer egy Z_1 elemét. A fentiek alapján a következő kettő közül valamelyik teljesül:

$$\frac{\sum_{Z\in\mathcal{Z}} b(Z)y_Z}{\sum_{Z\in\mathcal{Z}} \delta(Z)y_Z} \geq \frac{b(Z_1)y_{Z_1}}{\delta(Z_1)y_{Z_1}}$$

vagy

$$\frac{\sum_{Z\in\mathcal{Z}} b(Z)y_Z}{\sum_{Z\in\mathcal{Z}} \delta(Z)y_Z} \geq \frac{\sum_{Z\in\mathcal{Z},Z\neq Z_1} b(Z)y_Z}{\sum_{Z\in\mathcal{Z},Z\neq Z_1} \delta(Z)y_Z}$$

Így a $\mathcal{Z}$ halmazrendszert helyettesíthetjük egy kisebb elemszámú halmazrendszerrel, aminek a célfüggvényértéke nem nagyobb. Ezt ismételjük addig, amíg 1 elemű halmazrendszerhez nem jutunk.

Tehát a halmazrendszert helyettesíthetjük egy halmazával, például a minimális átlagú halmazával. Legyen Z', ahol a $\min_{Z\in\mathcal{Z}} \frac{b'(Z)}{\delta(Z)}$ minimumot felveszi. Ekkor a halmazrendszer helyett vehetjük a Z' halmazt az $y_{Z'}$ súllyal. Ezzel egy szintén megengedett megoldást kaptunk és a célfüggvény érték nem nőtt.
Egy halmaz esetén már az y_Z súly értéke nem változtatja meg a célfüggvényértéket, mert $\frac{b'(Z)y_Z}{\delta(Z)y_Z} = \frac{b'(Z)}{\delta(Z)}$. Tehát ezután feltehetjük, hogy az optimális duális megoldásban a halmazrendszer 1 db halmazt tartalmaz, amire $y_Z = 1$.

3. Minimális átlagú vágás keresés szubmoduláris függvényekkel

Az előzőek miatt feltehetjük, hogy a keresett halmazrendszer egyetlen halmazból áll. Tehát ekkor a duális feladatban olyan $Z \subset V$ halmazt keresünk, amire a $\frac{b'(Z)}{\delta(Z)}$ érték minimális. Tehát egy minimális átlagú vágás keresünk.

Először legyen $\lambda_1 = 0, b_1(Z) = b'(Z)$ és minimalizáljuk a b_1 teljesen szubmoduláris függvényt. Jelöljük a minimális halmazt Z_1-val.

Az i-dik iterációban legyen $\lambda_i = \frac{b'(Z_{i-1})}{\delta(Z_{i-1})}$ és $b_i(Z) = b'(Z) - \lambda_i\delta(Z)$.
b_i teljesen szubmoduláris:

$$b_i(X) + b_i(Y) = b'(X) - \lambda_i\delta(X) + b'(Y) - \lambda_i\delta(Y) \geq b'(X\cap Y) + b'(X\cup Y) - \lambda_i(\delta(X) + \delta(Y))$$
$$\geq b'(X\cap Y) + b'(X\cup Y) - \lambda_i(\delta(X\cap Y) + \delta(X\cup Y)) = b'(X\cap Y) - \lambda_i\delta(X\cap Y) + b'(X\cup Y) - \lambda_i\delta(X\cup Y)$$
$$= b_i(X\cap Y) + b_i(X\cup Y)$$

Ez valóban teljesül, mivel $\lambda_i \leq 0$ és $\delta(X\cap Y) + \delta(X\cup Y) \leq \delta(X) + \delta(Y)$.

Az iterációkat addig ismételjük, amíg az minimális halmaz súlya ≥ 0 lesz. Az ebben az iterációban használt $\lambda = \lambda_i$-re teljesül, hogy $\forall Z \subset V$-re:
$\frac{b(Z)}{\delta(Z)} \geq \lambda$, mivel $b_i(Z) = b'(Z) - \lambda\delta(Z) \geq 0$
Ekkor λ az optimum értéke a duál feladatnak. (Az utolsó iterációban talált Z_i pedig az optimális halmaz.)

Ha valamelyik iterációban, olyan Z_i halmazt találunk, amire $\delta(Z_i) = 0$, akkor megállunk. Ekkor a primál feladatnak nincs megoldása, mivel $b'(Z_i) < 0$, különben megálltunk volna.

Legfeljebb élszámnyi iteráció után biztosan megállunk, mert $\delta(Z_{i+1}) < \delta(Z_i)$. λ_i, Z_i választása és $\lambda_{i-1} > \lambda_i$ miatt: $b(Z_i) - \lambda_{i-1}\delta(Z_i) \leq b(Z_{i+1}) - \lambda_{i-1}\delta(Z_{i+1})$

Tegyük fel indirekt, hogy: $\delta(Z_i) \leq \delta(Z_{i+1}) \to -(\lambda_i - \lambda_{i+1})\delta(Z_i) \leq -(\lambda_i - \lambda_{i+1})\delta(Z_{i+1})$
$b(Z_i) - \lambda_{i-1}\delta(Z_i) - (\lambda_i - \lambda_{i+1})\delta(Z_i) \leq b(Z_{i+1}) - \lambda_{i-1}\delta(Z_{i+1}) - (\lambda_i - \lambda_{i+1})\delta(Z_{i+1})$
$b(Z_i) - \lambda_i\delta(Z_i) \leq b(Z_{i+1}) - \lambda_i\delta(Z_{i+1})$

De ez nem lehet, mert Z_{i+1} választása miatt: $b(Z_i) - \lambda_i\delta(Z_i) \geq b(Z_{i+1}) - \lambda_i\delta(Z_{i+1})$

Az iterációk alatt a λ értékét mindig csökkentjük, és ha legalább 2 iteráció elindul, akkor minden megtalált Z_i-re teljesül, hogy $b'(Z_i) < 0$. Ha ez első iterációban megtalált minimális halmaz súlya pozitív, akkor a primál feladatnak a triviális megoldás jó megoldása. (Triviális megoldás az $x_e \equiv 0$.)

Ha van a gráfban olyan Z halmaz, amire $b'(Z) < 0, \delta(Z) = 0$, akkor azt az iterációk alatt megtaláljuk. A $\delta(Z') > 0$ tulajdonságú halmazok értékét minden iterációban növeljük, így egy idő után csak a $\delta(Z) = 0$ tulajdonságú halmazok maradhatnak negatívak.

Innentől ugyanúgy használhatjuk a Newton-közelítést, mint a kiegyensúlyozott folyamot kereső algoritmusban. A Newton-közelítés lépésszámára vonatkozó becslést ebben az esetben is teljesülni fog.

4. Kiegyensúlyozott szubmoduláris folyam metsző̋n szubmoduláris függvénnyel

Az előbbi feladat elmondható úgy is, ha a $b(Z)$ halmazfüggvény metszőn szubmoduláris. Ekkor a feladat duálisa az előbbiekhez megegyezően átalakítható egy halmazrendszer keresésére, amire $\min \frac{\sum_{Z\subset V} y_Z b'(Z)}{\sum_{e\in E} y_e}$ minimális.

Vizsgáljuk most metszőn szubmoduláris függvényre az átalakított duál feladatot. Ha van két X, Y kiválasztott metsző halmaz, akkor $y_{X\cup Y}, y_{X\cap Y}$ súlyait növeljük meg $\min\{y_X, y_Y\}$-vel, y_X, y_Y súlyait pedig csökkentsük ugyanennyivel. Ez ugyanúgy megengedett megoldás marad és célfüggvény értéke nem nőtt.

Tehát ekkor a kiválasztott halmazrendszer lamináris, jelöljök $\mathcal{Z}$-vel. Ebben a halmazrendszerben egy halmazt nevezzünk legbővebbnek, ha őt nem tartalmazza másik halmaz a halmazrendszerből. A következőképpen alakítsuk át ezt a halmazrendszert:

Az átalakítás egy lépése:

Ha a halmazrendszernek több legbővebb halmaza is van:
Vegyük a halmazrendszer legbővebb halmazait, legyenek ezek $Z_1, Z_2, .., Z_i$ és jelölje ezek unióját Z_1' és legyen $b''(Z_1') = \sum_{j=1,2..,i} b'(Z_j)$. A halmazrendszerben a $Z_1, Z_2, ...Z_i$ halmazok súlyát csökkentsük le $\min_{j=1,2..i} y_{Z_j}$-vel, a Z_1' halmazt bevesszük a halmazrendszerbe $\min_{j=1,2..i} y_{Z_j}$ súllyal. Ekkor a $\sum_{Z\in\mathcal{Z}} b''(Z)$ nem változott, ahol $b''(Z) = b'(Z)$ a halmazrendszer eredeti halmazaira. A $\sum_{e\in E} y_e$ összeg az új halmazrendszerre nem nőtt. (Bizonyos élek ugyanolyan súllyal, bizonyos élek kisebb súllyal szerepelnek az összegben.) Erre az új $\mathcal{Z}'$ halmazrendszerre az átalakított duál feladat célfüggvényértéke nem nagyobb, azaz $\frac{\sum_{Z\in\mathcal{Z}} b'(Z)y_Z}{\sum_{e\in E} y_e} \geq \frac{\sum_{Z\in\mathcal{Z}'} b''(Z)y_Z'}{\sum_{e\in E} y_e'}$
Ezután a Z_1' halmazt jelöljük meg.

Ha a halmazrendszernek csak egy legbővebb halmaza van, akkor azt megjelöljük. A halmazrendszer átalakítása folyamán úgy tekintünk rá, mintha kitöröltük volna, de a végén "visszatesszük" a halmazrendszerbe.

Ezután a jelölt halmazokat figyelmen kívül hagyva, folytassuk az átalakítást ugyanezt a lépést ismételve, amíg nem válik minden halmaz jelöltté.

Ezzel a halmazrendszerben lévő diszjunkt halmazpárok száma csökkent, mert legalább egy halmazt $Z_1, Z_2, .., Z_i$ közül kitöröltünk és helyette az uniójukat vettük be, ami semelyik kiválasztott halmazzal sem lehet metsző. Minden jelölté vált halmaz tartalmazza az összes akkor még nem jelölt halmazt. Tehát egy jelöltté vált halmaz korábban megjelöltekkel se lesz diszjunkt.

Ez az átalakítás legfeljebb ($|\mathcal{Z}|+\#$(diszjunkt halmazpárok száma)) lépésben véget ér. A végén kapott $\mathcal{Z}^*$ halmazrendszerre teljesül, hogy:

$$\frac{\sum_{Z\in\mathcal{Z}} b'(Z)y_Z}{\sum_{e\in E} y_e} \geq \frac{\sum_{Z\in\mathcal{Z}^*} b''(Z)y_Z^*}{\sum_{e\in E} y_e^*} = \frac{\sum_{Z\in\mathcal{Z}^*} b''(Z)y_Z^*}{\sum_{Z\in\mathcal{Z}^*} \delta(Z)y_Z^*}$$

Az így elkészített halmazrendszer olyan, hogy bármely két halmaza közül az egyik tartalmazza a másikat. Tehát éppen olyan, mint a teljesen szubmoduláris esetben látott "egymást tartalmazó" halmazrendszer. A b'' halmazfüggvény ezekre a halmazokra teljesen szubmoduláris, mivel bármely $Y \subset X$-ra triviálisan teljesül a $b''(X) + b''(Y) \geq b''(X \cap Y) + b''(X \cup Y) = b''(X) + b''(Y)$
A teljesen szubmoduláris esethez hasonló módon kiválaszthatunk $\mathcal{Z}^*$-ból egy Z^* halmazt, amire:

$$\frac{\sum_{Z\in\mathcal{Z}^*} b''(Z)y_Z^*}{\sum_{Z\in\mathcal{Z}^*} \delta(Z)y_Z^*} \geq \frac{b''(Z^*)}{\delta(Z^*)}$$

Itt az $y_{Z^*}^*$-t választhatjuk 1-nek, mivel a hányadosban kiesik a $y_{Z^*}^*$ értéke.
Z^* az eredeti $\mathcal{Z}$ halmazrendszer néhány diszjunkt elemének uniója. Legyen $Z^* = Z_1^* \cup Z_2^* \cup .. \cup Z_i^*$. b'' definíciójából következik, hogy:

$$\frac{\sum_{Z\in\mathcal{Z}} b'(Z)y_Z}{\sum_{e\in E} y_e} \geq \frac{b''(Z^*)}{\delta(Z^*)} = \frac{\sum_{j=1,2..,i} b'(Z_j^*)}{\delta(\bigcup_{j=1,2..,i} Z_j^*)}$$

Így feltehető, hogy az átalakított duális feladat optimális megoldása diszjunkt halmazok uniójából áll, ahol minden kiválasztott halmaz súlya azonos (praktikusan 1).

Ha a fenti kifejezésben $\delta(\bigcup_{j=1,2..,i} Z_j^*) = 0$, akkor a duál feladat nem korlátos. Mivel a duál feladat optimális megoldása nem pozitív, így a $\sum_{j=1,2..,i} b'(Z_j^*) < 0$. Ekkor ezeket a halmazokat tetszőlegesen sokszor bevéve a halmazrendszerbe, tetszőlegesen kicsi célfüggvényértékű duális megoldást kapunk. Vagyis a duális nem korlátos, tehát a primál feladatnak nincs megoldása.

Ha a feladatban $\forall Z \subset V$-re $b'(Z) \geq 0$, akkor a primál feladatnak a triviális $x_e \equiv 0$ megoldás megengedett megoldása. (Ekkor a duál feladatnak az üres halmazrendszer egy optimális megoldása.)

5. T-kötés pakolás

Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, és $T \subseteq V$, $|T|$ páros a csúcsoknak egy részhalmaza. Legyen B olyan gráf, aminek a sorai a gráf T-kötéseinek incidencia vektorai. Ekkor a következő feladat megoldásai a gráf T-vágásai:

$$\begin{aligned} \min(cx) \\ Bx \geq 1 \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

A feladat optimális megoldásai a gráf minimális T-vágásai.

A feladat duálisa a maximális számú T-kötés pakolás:

$$\begin{aligned} \max(y1) \\ yB \leq c \\ y \geq 0 \end{aligned}$$

A maximális tört T-kötés pakolásra Barahona adott $\mathcal{O}(n^6)$ idejű algoritmust. [1] Jelöljük az $(S, V \setminus S)$ vágás kapacitását: $\overline{c}(S)$-sel. $\overline{c}(S) = \sum_{e \in \delta(S)} c(E)$.
A minimális T-vágás keresésére Padberg és Rao adott polinomiális, kombinatorikus algoritmus. Az algoritmus a következő lemmán alapul:

1. Lemma. *Legyen S egy minimális vágás, ami legalább két csúcsot szeparál T-ben.*
Ha $|S \cap T|$ páratlan, akkor S egy minimális T-vágás.
Ha $|S \cap T|$ páros, akkor van olyan $S' \subset S$ vagy $S' \subset V \setminus S$, ami minimális T-vágás.

1. Bizonyítás. *AZ $|S \cap T|$ páratlan esetben az állítás triviális.*
Ha $|S \cap T|$ páros, akkor legyen A egy minimális T-vágása a gráfnak.

1. eset: $|A \cap S \cap T|$ páratlan:
1.a) eset: Ha $A \cup S$ szeparál legalább két csúcsot T-ben:
$\overline{c}$ szubmodularitás miatt:
$\overline{c}(A \cap S) + \overline{c}(A \cup S) \leq \overline{c}(A) + \overline{c}(S)$
De $A \cup S$ szeparál két csúcsot T-ben, ezért $\overline{c}(S) \leq \overline{c}(A \cup S)$. Valamint $A \cap S$ T-vágás, ezért $\overline{c}(A) \leq \overline{c}(A \cap S)$.
Így $\overline{c}(A \cap S) = \overline{c}(A) \rightarrow A \cap S$ minimális T-vágás.

1.b) eset: Ha $A \cup S$ nem szeparál csúcsot T-ben, azaz $T \subseteq A \cup S$:
$A' = V \setminus A$ szintén minimális T-vágás. $A' \cup S$ nem tartalmazhatja T-t, mivel $A \setminus S$ biztosan tartalmaz T-beli csúcsot. Tehát $A' \cup S$ szeparál legalább két csúcsot T-ben. Erre az a) esethez megegyezően láthatjuk, hogy $A' \cap S$ minimális T-vágás.

2. eset: $|A \cap S \cap T|$ páros:
Ekkor $S' = V \setminus S$ ugyanazt a vágást definiálja és $|A \cap S' \cap T|$ páratlan. Alkalmazzuk S'-re az 1. esetet.

A lemma alapján a minimális T-vágás keresésére egyszerű algoritmus adható. Az algoritmushoz Gomory-Hu fát használunk, akkor még egyszerűbbé válik. Ilyenkor elég kiválasztani a Gomory-Hu fának azt a minimális élét, ami által definiált vágás T-vágás.

Algorithm 1 Min. T-vágás keresés(G)

if $|T| = 0$ vagy $|V| = 0$ **then**
  A feladat nem értelmes, VÉGE
end if
Legyen S minimális vágás, ami legalább 2 csúcsot szeparál T-ben
if $S \cap T$ páratlan **then**
  Bontsuk ki az összehúzott csúcsokat, ha vannak
  VÉGE $\rightarrow$ S minimális T-vágás
end if
if $S \cap T$ páros **then**
  $G_1 = G/_S$, $G_2 = G/_{V \setminus S}$
  Min. T-vágás keresés(G_1)
  Min. T-vágás keresés(G_2)
end if

A gyenge dualitás-tételből következik, hogy $\forall T$-vágás kapacitása $\geq \forall$ T-kötés pakolás érétke. Ahhoz, hogy ez a becslés éles legyen, az optimális tört T-kötés pakolás egy pozitív súlyú T-kötésének és egy minimális T-vágásnak pontosan 1 közös éle lehet.

Jelölje $\lambda(G)$ az optimum értékét a G gráfra, ezt az előbbi algoritmussal kiszámolhatjuk. Tetszőleges $U \subseteq E$-ra és $\alpha > 0$-ra legyen $G - \alpha U$ az a gráf, amit G-ből kapunk a következőképpen: G-ben az U-beli élek kapacitását/költségét csökkentsük le α-val. Ha egy él költsége ezáltal 0-ra csökkent, akkor azt az élt töröljük ki a gráfból.
Legyen $\mu(U) = \min_{e \in U} c(E)$.
$\forall U$ T-kötésre definiáljuk az α_U értéket, $\alpha_U = \max(\alpha \mid \lambda(G - \alpha U) = \lambda(G) - \alpha, 0 \leq \alpha \leq \mu(U))$

Ezekkel a jelölésekkel a feladat rekurzívan megoldható: Vegyünk egy U T-kötést, aminek a súlya pozitív az optimális pakolásban. Számoljuk ki rá az α_U érték. A $G' = G - \alpha_U U$ gráf optimális T-kötés pakolását kiegészítve az U T-kötéssel α_U súllyal, a G gráf optimális pakolását kapjuk.

2. Lemma. *Ha U T-kötés és $\alpha_U = 0$, akkor van olyan minimális S T-vágás, amire $|\delta(S) \cap U| > 1$*

2. Bizonyítás. *$G - \alpha_U U$-ban minden T-vágás költsége $k\alpha_U$-val csökkent, ahol $k = |\delta(S) \cap U|$. Tehát ha $|\delta(S) \cap U| = 1$ lenne bármely T-vágásra, akkor $\exists \alpha_U > 0$ kicsi szám, amire $\lambda(G - \alpha_U U) = \lambda(G) - \alpha_U$*

Hasonlóan ha egy U T-kötésre van olyan S T-vágás, amire $|\delta(S) \cap U| > 1$, akkor $\alpha_U = 0$

3. Lemma. *Legyen A, B minimális T-vágások, keresztezik egymást (azaz $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, V \setminus (A \cup B)$ egyike sem üres) és $|A \cap B \cap T|$ páratlan. Legyen U egy T-kötés.*
Ha $\delta(A \cap B), \delta(A \cup B)$ pontosan 1 élben metszi U-t $\Rightarrow$ $\delta(A), \delta(B)$ is pontosan 1 élben metszi.

3. Bizonyítás. *$\overline{c}$ szubmodularitása miatt: $\overline{c}(A \cap B) + \overline{c}(A \cup B) \leq \overline{c}(A) + \overline{c}(B)$. Mivel A, B minimális T-vágások, így $A \cap B, A \cup B$ is minimális T-vágások és $A \setminus B, B \setminus A$ között nem megy él.*
Egy U T-kötésre és egy S T-vágásra $|U \cap \delta(S)|$ mindig páratlan. Innen könnyű látni, hogy ha egy T-kötés csak 1 élben metszi $A \cap B, A \cup B$-t, akkor A, B-t is.

Ehhez hasonlóan bizonyítható a következő lemma:

4. Lemma. *Legyen A, B minimális T-vágások, keresztezik egymást (azaz $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, V \setminus (A \cup B)$ egyike sem üres) és $|A \cap B \cap T|$ páros. Legyen U egy T-kötés.*
Ha $\delta(A \setminus B), \delta(B \setminus A)$ pontosan 1 élben metszi U-t $\Rightarrow$ $\delta(A), \delta(B)$ is pontosan 1 élben metszi.

Az előbbi két lemmából következik, hogy ha egy T-kötés pontosan 1 élben metszi a minimális T-vágások egy lamináris halmazrendszerének minden tagját, akkor az összes minimális T-vágást is egy élben metszi. Ekkor a 2. lemma miatt ez a T-kötés pozitív súllyal bevehető az optimális pakolásba.

Az optimális T-kötés pakolást kereső algoritmusban egyszerre építjük a a minimális T-vágásoknak egy lamináris Φ rendszerét és magát a T-kötés pakolást. Minden iterációban megtalálunk egy pozitív súlyú T-kötés, majd egyszerűsítjük a gráfot és ha tudjuk, akkor bővítjük a Φ halmazrendszert.

Legyen U egy olyan T-kötés, ami minden T-vágást pontosan 1 élben metsz G-ben. ($\alpha_U>0$)
Ha $\alpha_U = \mu(U)$: $G-\alpha_U U$ éleinek száma kevesebb, mint G éleinek a száma, mivel valamelyik élének a költségét 0-ra csökkentettük (és töröltük).
Ha $\alpha_U < \mu(U)$: az U T-kötést nem tudjuk α_U-nál nagyobb súllyal betenni a pakolásba, azaz $G - \alpha_U U$ gráfnak van olyan S minimális T-kötése, amire $|U \cap \delta(S)| > 1$. ($G - \alpha_U U$-ban U-nak az új α_U értéke 0.) Ez az S T-vágás az eredeti G gráfnak nem volt minimális T-vágása, de $G - \alpha_U U$-nak már az. Vagyis $S \notin \Phi \rightarrow S$-t bevehetjük a Φ halmazrendszerbe.

Tehát az algoritmus minden iterációjában vagy G élszáma csökken vagy Φ mérete nő. Így az algoritmus legfeljebb $m + 2n - 1$ iteráció után megáll. (Egy lamináris halmazrendszer mérete n elemen legfeljebb $2n - 1$.)

Algorithm 2 Maximális T-kötés pakolás (G)

1: $\Phi = \emptyset$
2: Keressünk U T-kötést, amire $|U \cap \delta(S)| = 1$ $\forall S \in \Phi$
3: Számoljuk ki α_U értékét
4: **if** $\alpha_U < \mu(U)$ **then**
5: Találunk egy $S \notin \Phi$ halmazt, amire $G - \alpha_U U$-ban $|U \cap \delta(S)| > 1$
6: Vegyük be S-t Φ-be és keresztezzük ki, azaz tegyük laminárissá Φ-t
7: **end if**
8: $G = G - \alpha_U U$
9: **if** $\lambda(G) > 0$ **then**
10: Ugorjunk 2. lépésre
11: **end if**

Az algoritmus 2. lépésében olyan T-kötést keresünk, ami $|U \cap \delta(S)| = 1$ $\forall S \in \Phi$. Definiáljunk egy új költségfüggvényt az éleken, ami $c'(e) =\#$(Olyan $S \in \Phi$ halmazok száma, amire $e \in \delta(S)$). Keressünk c'-re minimális T-kötést. Ennek a költsége legalább $|\Phi|$, mivel minden T-kötés legalább 1 élben metsz egy T-vágást. Tehát a minimális költségű T-kötés minden Φ-beli vágást csak 1 élben metszhet.

A 3. lépésben az α_U értéket kell kiszámolnunk. Ehhez definiáljuk az $f(\alpha) = \lambda(G - \alpha U)$ függvényt. Az f függvény lineáris függvények minimuma, így f konkáv és szakaszonként lineáris. Az f függvény első töréspontját szeretnénk megtalálni. Ennél a töréspontnál nagyobb α-k esetén a meredekség csökkenése miatt egy új minimális T-vágás keletkezett, aminek a metszete U-val nagyobb, mint 1. Ezt a töréspontban talált új T-vágást tudjuk majd a Φ-hez hozzávenni, mert $|U \cap \delta(S)| > 1$ és az f töréspontjában a vágás költsége egyenlő a többi, már meglévő minimális T-vágás költségével a gráfban.

Az algoritmus minden iterációjában a k értéke csökken. Így legfeljebb $|U| \leq n-1$ iteráció után megáll. Az U T-kötés tartalmazásra minimális, így nem tartalmaz kört.

Algorithm 3 α_U kiszámolása

```
1: α_U = μ(U)
2: Keressünk meg az S minimális T-vágást G − α_U U-ban.
3: if λ(G − αU) = λ(G) − α_U then
4:     KÉSZ
5: end if
6: if λ(G − αU) < λ(G) − α_U then
7:     Legyen α' a λ(G) − α = c̄(S) − kα megoldása, ahol k = |U ∩ δ_G(S)|
8: end if
9: α_U = α' és lépjünk a 2. lépésre
```

6. Célkitűzés

A témát mindenképp szeretném folytatni szakdolgozat formájába. A szubmoduláris folyamoknál a metsző szubmoduláris esetben nem tudjuk ugyanazt a technikát használni, mint a teljesen szubmoduláris folyamoknál.A T-kötés pakolásnál felmerül a kérdés, hogy az algoritmus átvihető-e teljes párosítások pakolására. Ehhez szükséges a teljes a párosításokat lefogó halmazoknak egy jellemzése.
Mindkét problémában fontos szerepet kaptak a szubmoduláris függvények, valalmint a Newton-iteráció. A továbbiak érdekesnek hangzik a két problémakör egyesítése egy közös általánosításban.

Hivatkozások

[1] Francisco Barahona. Fractional packing of t -joins. *SIAM J. Discrete Math.*, 17:661–669, 04 2004.