Kiegyensúlyozott folyamok és teljes párosítások

Szabó Eszter
Témavezető: Jüttner Alpár

2020

Bevezetés

- Minimális T-vágás keresés
- Maximális tört T-kötés pakolás [1]
- Teljesen szubmoduláris áram feladat megoldása
- Metszőn szubmoduláris áram feladat egyszerűsítése

Francisco Barahona.
Fractional packing of t -joins.
SIAM J. Discrete Math., 17:661–669, 04 2004.

Minimális T-vágás

$G = (V, E)$ irányítatlan gráf
$T \subseteq V$, $|T|$ páros
Legyen B olyan gráf, aminek a sorai a gráf T-kötéseinek incidencia vektorai.

$$\begin{aligned} &\min(cx) \\ Bx &\geq 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

A feladat optimális megoldásai a gráf minimális T-vágásai.

Minimális T-vágás keresés

Lemma

Legyen S egy minimális vágás, ami legalább két csúcsot szeparál T-ben.
Ha $|S \cap T|$ páratlan, akkor S egy minimális T-vágás.
Ha $|S \cap T|$ páros, akkor van olyan $S' \subset S$ vagy $S' \subset V \setminus S$, ami minimális T-vágás.

Maximális T-kötés pakolás

$$\begin{aligned} \max(y1) \\ yB \le c \\ y \ge 0 \end{aligned}$$

$\lambda(G) =$ az optimum értékét a G gráfra.
$\mu(U) = \min_{e \in U} c(E)$.
$\alpha_U = \max(\alpha \mid \lambda(G - \alpha U) = \lambda(G) - \alpha, 0 \le \alpha \le \mu(U))$

Maximális T-kötés pakolás keresés

Lemma

Ha U T-kötés és $\alpha_U = 0$, akkor van olyan minimális S T-vágás, amire $|\delta(S) \cap U| > 1$

Ha egy U T-kötésre van olyan S T-vágás, amire $|\delta(S) \cap U| > 1$, akkor $\alpha_U = 0$

Így a rekurzív algoritmushoz olyan T-kötéseket keressünk, ami $\forall T$-vágással a metszete 1.

T-vágásoknak egy jó rendszere

Lemma

Legyen A, B minimális T-vágások, keresztezik egymást (azaz $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, V \setminus (A \cup B)$ egyike sem üres) és $|A \cap B \cap T|$ páratlan. Legyen U egy T-kötés.
Ha $\delta(A \cap B), \delta(A \cup B)$ pontosan 1 élben metszi U-t $\Rightarrow \delta(A), \delta(B)$ is pontosan 1 élben metszi.

Lemma

Legyen A, B minimális T-vágások, keresztezik egymást (azaz $A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, V \setminus (A \cup B)$ egyike sem üres) és $|A \cap B \cap T|$ páros. Legyen U egy T-kötés.
Ha $\delta(A \setminus B), \delta(B \setminus A)$ pontosan 1 élben metszi U-t $\Rightarrow \delta(A), \delta(B)$ is pontosan 1 élben metszi.

Algoritmus maximális T-kötés pakolás

Algorithm 1 Maximális T-kötés pakolás (G)

1: $\Phi = \emptyset$
2: Keressünk U T-kötést, amire $|U \cap \delta(S)| = 1 \ \forall S \in \Phi$
3: Számoljuk ki α_U értékét
4: **if** $\alpha_U < \mu(U)$ **then**
5:     Találunk $S \notin \Phi$ halmazt, amire $G - \alpha_U U$-ban $|U \cap \delta(S)| > 1$
6:     Vegyük be S-t Φ-be és keresztezzük ki
7: **end if**
8: $G = G - \alpha_U U$
9: **if** $\lambda(G) > 0$ **then**
10:     Ugorjunk 2. lépésre
11: **end if**

Kiegyensúlyozott szubmoduláris áram feladat

Adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf
$b(i)$ igényfüggvény $\forall Z \subset V$

$$\min(\max\{x_e\} - \min\{x_e\})$$

$$\sum_{e\in\rho(X)} x_e - \sum_{e\in\delta(X)} x_e \leq b(X) \qquad \forall X \subset V$$

$$x \geq 0$$

Kiegyensúlyozott szubmoduláris áram feladat

$y = \min_E\{x_e\}$, $z = \max_E\{x_e\}$, $\delta = z - y$
$b'(X) = b(X) - \rho(X)y + \delta(X)y$

$$\max -\delta$$
$$\sum_{e\in\rho(X)} x_e - \sum_{e\in\delta(X)} x_e \leq b'(X) \qquad \forall X \subset V$$
$$x \leq \delta$$
$$x \geq 0$$

$h(y) =$ rögzített y érték mellett a fenti feladat optimuma
A probléma optimális megoldása $h(y)$ minimumhelye

A feladat duálisa

$$\min \sum_{Z \subset V} y_Z b'(Z)$$

$$\sum_{e \in \rho(Z)} y_Z - \sum_{e \in \delta(Z)} y_Z + y_e \geq 0 \qquad \forall e \in E$$

$$\sum_{e \in E} -y_e \geq -1$$

$$y_e, y_Z \geq 0 \qquad \forall e \in E, Z \subset V$$

$$\min \frac{\sum_{Z \subset V} y_Z b'(Z)}{\sum_{e \in E} y_e}$$

$$y_e \geq \sum_{e \in \delta(Z)} y_Z - \sum_{e \in \rho(Z)} y_Z \qquad \forall e \in E$$

$$\sum_{e \in E} y_e > 0$$

$$y_e, y_Z \geq 0 \qquad \forall e \in E, Z \subset V$$

Duális feladat megoldása

$$\min \frac{\sum_{Z \subset V} y_Z b'(Z)}{\sum_{e \in E} y_e}$$

Ha $\sum_{e \in E} y_e^* = 0$ és $y^* b < 0$, akkor a duális feladat nem korlátos.

Ha $\sum_{e \in E} y_e^* = 0$ és $y^* b = 0$, akkor $b'(Z) \geq 0 \ \forall Z \subset V \Rightarrow$ $x \equiv 0, \delta = 0$ megengedett és optimális megoldása a primál feladatnak.

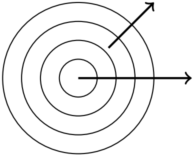
Átalakított duál feladat megoldásai

A $Z \subset V$ részhalmazt y_Z súllyal választjuk.
$\forall e \in E \to y_e = (\sum_{e \in \delta(Z)} y_Z - \sum_{e \in \rho(Z)} y_Z)^+$

Az optimális megoldásban a kiválasztott $\mathcal{Z}$ halmazrendszert egyszerűsíthetjük:

1. Feltehető, hogy lamináris.
2. Feltehető, hogy nem tartalmaz diszjunkt halmazokat.

$\mathcal{Z}$ egyszerűsítése



Nincs olyan él, ami az egyik kiválasztott halmazból kilép, egy másikba pedig belép.
$\rightarrow \sum_{e \in E} y_e = \sum_{Z \in \mathcal{Z}} y_Z \delta(Z)$

$\exists Z_1 \in \mathcal{Z}$, amire:

$$\frac{\sum_{Z \in \mathcal{Z}} b(Z) y_Z}{\sum_{Z \in \mathcal{Z}} \delta(Z) y_Z} \geq \frac{b(Z_1) y_{Z_1}}{\delta(Z_1) y_{Z_1}}$$

$\Rightarrow$ olyan $Z \subset V$ keresünk, amire $\frac{b'(Z)}{\delta(Z)}$ minimális

Minimális átlagú vágás keresés

$\lambda_1 = 0$, $b_1(Z) = b'(Z)$

$\lambda_i = \frac{b'(Z_{i-1})}{\delta(Z_{i-1})}$
$b_i(Z) = b'(Z) - \lambda_i \delta(Z)$
$\rightarrow$ minimalizáljuk b_i teljesen szubmoduláris függvényt

Az iterációkat addig ismételjük, amíg az minimális halmaz súlya ≥ 0 lesz.
Legfeljebb élszámnyi iteráció után biztosan megállunk, mert $\delta(Z_{i+1}) < \delta(Z_i)$.
Ha van a gráfban olyan Z halmaz, amire $b'(Z) < 0, \delta(Z) = 0$, akkor azt az iterációk alatt megtaláljuk.

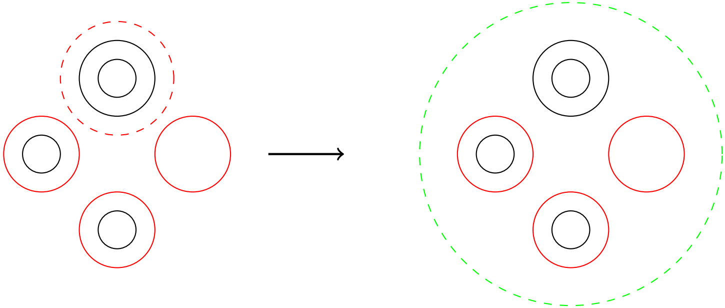
Metszőn szubmoduláris függvénnyel

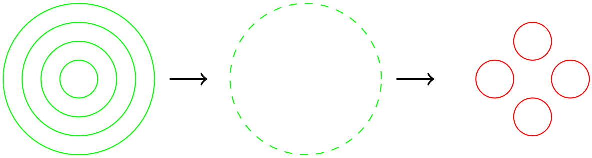
$$\min \frac{\sum_{Z \subset V} y_Z b'(Z)}{\sum_{e \in E} y_e}$$

Az optimális megoldásban a kiválasztott $\mathcal{Z}$ halmazrendszert egyszerűsíthetjük:
1. Feltehető, hogy lamináris.
2. Feltehető, hogy nem tartalmaz X, Y halmazokat, amikre $X \subset Y$
Feltehető, hogy az optimális megoldás diszjunkt halmazok uniójából áll, amire a következő minimális:

$$\frac{\sum_{j=1,2..,i} b'(Z_j^*)}{\delta(\bigcup_{j=1,2..,i} Z_j^*)}$$

Halmazrendszer egyszerűsítése





Célkitűzés

- Maximális egész T-kötés pakolás
- Maximális teljes párosítás pakolás
- Kiegyensúlyozott Metszőn szobmudoláris áram feladat
- Szubmoduláris áram feladat más célfüggvényekre
- Optimális egész szubmoduláris áram feladat