Permutonok és entrópia

Szepessy Sára
Témavezető: Maga Balázs

2026. június 3.

Permuton

Definíció

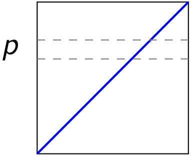
Valószínűségi mérték az egységnégyzeteten, aminek a marginális eloszlásai egyenletesek.

Permuton

Definíció

Valószínűségi mérték az egységnégyzeten, aminek a marginális eloszlásai egyenletesek.

- Például: (X, X) ahol $X \sim \text{uniform}([0, 1])$



Függvények, mint permutonok

Definíció

Egy $f : [0,1] \to [0,1]$ *függvényt mértéktartónak nevezünk, ha* $\forall A \subset [0,1]$*-re*

$$\lambda_1(f^{-1}(A)) = \lambda_1(A),$$

ahol λ_1 *az egydimenziós Lebesgue-mértéket jelöli.*

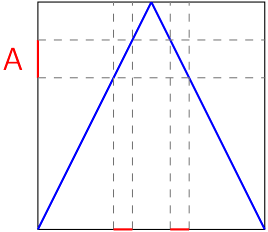
Függvények, mint permutonok

Definíció

Egy $f : [0,1] \to [0,1]$ *függvényt mértéktartónak nevezünk, ha* $\forall A \subset [0,1]$*-re*

$$\lambda_1(f^{-1}(A)) = \lambda_1(A),$$

ahol λ_1 *az egydimenziós Lebesgue-mértéket jelöli.*



Függvények, mint permutonok

Definíció

Egy $f : [0,1] \to [0,1]$ *függvényt mértéktartónak nevezünk, ha* $\forall A \subset [0,1]$*-re*

$$\lambda_1(f^{-1}(A)) = \lambda_1(A),$$

ahol λ_1 *az egydimenziós Lebesgue-mértéket jelöli.*

Definíció

Ha f *mértéktartó függvény, és* $A, B \subset [0,1]$ *mérhető halmazok, akkor*

$$\mu_f(A \times B) = \lambda_1(f^{-1}(B) \cap A).$$

Shannon-entrópia

Definíció

X diszkrét valószínűségi változó Shannon-entrópiája:

$$H[X] = -\sum_x P(X = x) \log(P(X = x))$$

- Egy eloszlás mennyire kaotikus
- Véges értékkészletű valószínűségi változók esetén az egyenletes eloszlásra maximális, ekkor az értéke $\log(\#\{\textit{lehetséges kimenetelek}\})$

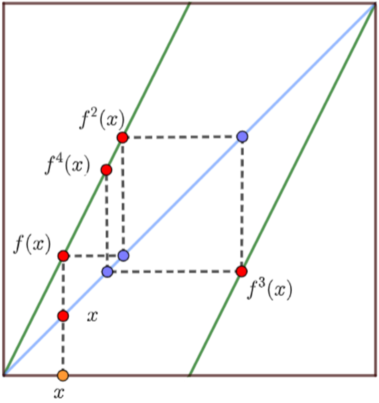
Permutáció entrópia

- legyen $f : [0,1] \to [0,1]$ (mértéktartó)
- az $x \in [0,1]$ első n iteráltja $x, f(x), \ldots f^{n-1}(x)$
- legyen $\pi = (k_1, \ldots, k_n)$ a $\{0, \ldots, n-1\}$ elemek egy permutációja
- ekkor P_π azon x pontok, melyek pályája a π-t követi:

$$P_\pi = \{x \in I \mid f^{k_1}(x) < f^{k_2}(x) < \cdots < f^{k_n}(x)\}$$

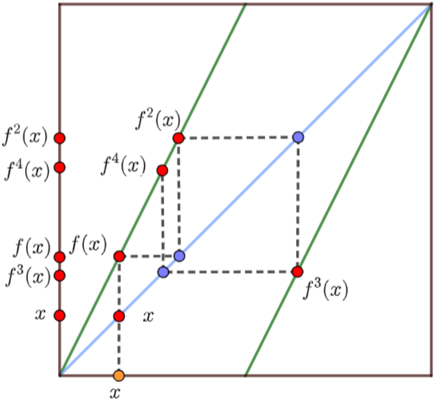
- $\mathcal{P}_n^*$: a nemüres P_π halmazok családja ($n \geq 2$)

Permutáció entrópia – példa



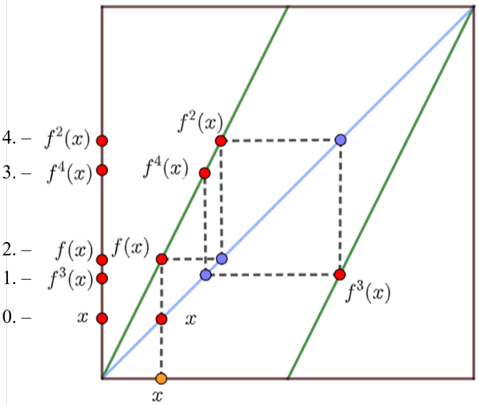
ábra: Első 5 iterált az $f(x) = 2x \bmod 1$ függvényre.

Permutáció entrópia – példa



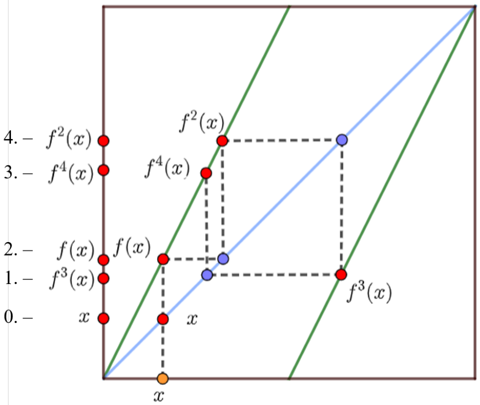
ábra: Első 5 iterált az $f(x) = 2x \bmod 1$ függvényre.

Permutáció entrópia – példa



ábra: Első 5 iterált az $f(x) = 2x \bmod 1$ függvényre.

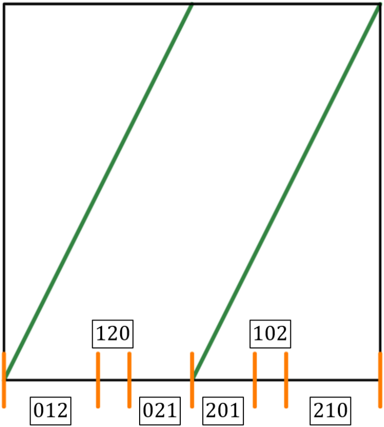
Permutáció entrópia – példa



	n	$\pi(n)$
x	0	0
$f(x)$	1	2
$f^2(x)$	2	4
$f^3(x)$	3	1
$f^4(x)$	4	3

ábra: Első 5 iterált az $f(x) = 2x \bmod 1$ függvényre.

Permutáció entrópia – példa



ábra: $\mathcal{P}_3^*$ az $f(x) = 2x \bmod 1$ függvényre.

Permutáció entrópia

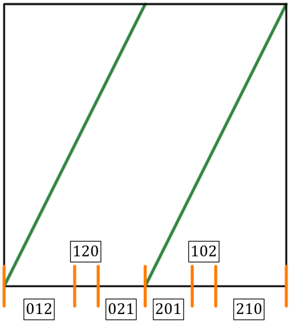
- legyen $f : [0,1] \to [0,1]$ (mértéktartó)
- az $x \in [0,1]$ első n iteráltja $x, f(x), \ldots f^{n-1}(x)$
- legyen $\pi = (k_1, \ldots, k_n)$ a $\{0, \ldots, n-1\}$ elemek egy permutációja
- ekkor P_π azon x pontok, melyek pályája a π-t követi:

$$P_\pi = \{x \in I \mid f^{k_1}(x) < f^{k_2}(x) < \cdots < f^{k_n}(x)\}$$

- $\mathcal{P}_n^*$: a nemüres P_π halmazok családja ($n \geq 2$)
- Az f függvény n-edrendű permutáció entrópiája a $\mathcal{P}_n^*$ partíció által generált valószínűségi eloszlás Shannon-entrópiája:

$$H_n^{\mathrm{perm}}(f) = -\sum_{P_\pi \in \mathcal{P}_n^*} \lambda(P_\pi) \log(\lambda(P_\pi)).$$

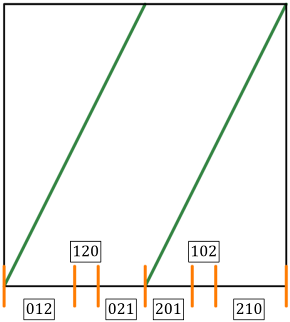
Permutáció entrópia – példa



ábra: $\mathcal{P}_3^*$ az $f(x) = 2x \bmod 1$ függvényre.

- $H_3^{\mathrm{perm}}(f) = -\left(2 \times \frac{1}{4} \cdot \log(\frac{1}{4}) + 2 \times \frac{1}{12} \cdot \log(\frac{1}{12}) + 2 \times \frac{1}{6} \cdot \log(\frac{1}{6})\right) \approx 2.46$

Permutáció entrópia – példa



ábra: $\mathcal{P}_3^*$ az $f(x) = 2x \bmod 1$ függvényre.

- $H_3^{\mathrm{perm}}(f) = -\left(2 \times \frac{1}{4} \cdot \log(\frac{1}{4}) + 2 \times \frac{1}{12} \cdot \log(\frac{1}{12}) + 2 \times \frac{1}{6} \cdot \log(\frac{1}{6})\right) \approx 2.46 < \log(6) \approx 2.58$

Aszimptotikus viselkedés

- $|\mathcal{P}_n^*| \leq n! \implies H_n^{\mathrm{perm}}(f) \leq \log(n!) \asymp n \cdot \log(n)$

Tétel (C. Bandt, G. Keller, B. Pompe)

Legyen $f : [0,1] \to [0,1]$ *mértéktartó, szakaszonként monoton függvény, ekkor:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_n^{\mathrm{perm}}(f) = h_{KS}(f).$$

- Itt $h_{KS}(f)$ az f függvény Kolmogorov-Sinai entrópiáját jelöli

Párhuzamos tétel

Tétel (Maga Balázs)

Legyen $f : [0,1] \to [0,1]$ *mértéktartó és szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, véges sok darabbal. Ekkor:* $\frac{H(\mu^{(n)})}{n} \to \int_{[0,1]} \log|f'|$.

- Itt $H(\mu^{(n)})$ az f függvényhez asszociált permuton mintavételi entrópiáját jelöli.
- Megfelelő feltételek mellett a határérték megegyezik az f függvény Kolmogorov-Sinai entrópiájával

Motiváció

- Párhuzam a két entrópia fogalom között: megfelelő regularitási feltételek mellett mindkét mennyiség a Kolmogorov-Sinai entrópiához tart
- Vajon az entrópia aszimptotikusan tipikus esetben "szépen" viselkedik?

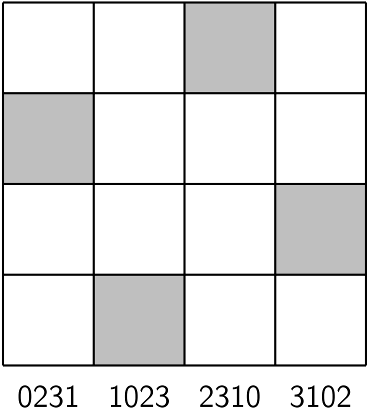
Tétel (Maga Balázs)

Generikus folytonos mértéktartó f függvényre:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{H(\mu_f^{(n)})}{n} = 0 \quad \textit{és} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{H(\mu_f^{(n)})}{n\log n} = 1.$$

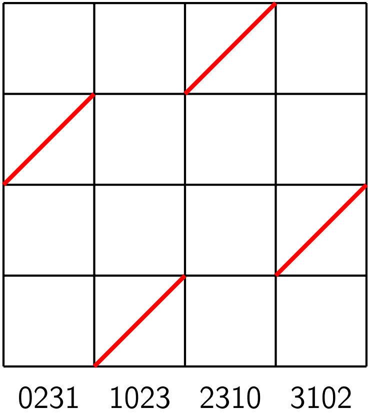
Permuton végtelen permutáció entrópiával

- Ötlet: rögzített n-re permuton maximális entrópiával
- $|\mathcal{P}_n^*| \leq n! \implies H_n^{\mathrm{perm}}(f) \leq \log(n!) \asymp n \cdot \log(n)$
- Példa: $n = 4$, $\pi = (2310)$
  $C(\pi) = \{(2310), (3102), (1023), (0231)\}$



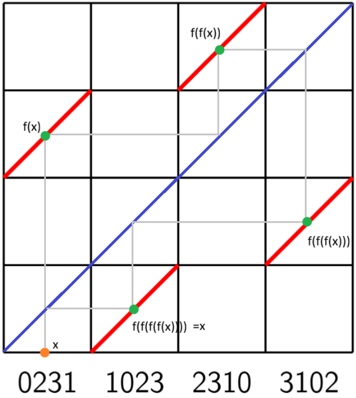
Permuton végtelen permutáció entrópiával

- Ötlet: rögzített n-re permuton maximális entrópiával
- $|\mathcal{P}_n^*| \leq n! \implies H_n^{\mathrm{perm}}(f) \leq \log(n!) \asymp n \cdot \log(n)$
- Példa: $n = 4$, $\pi = (2310)$
  $C(\pi) = \{(2310), (3102), (1023), (0231)\}$



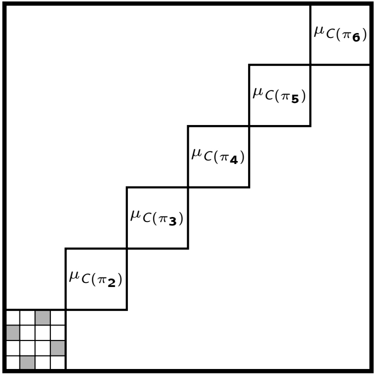
Permuton végtelen permutáció entrópiával

- Ötlet: rögzített n-re permuton maximális entrópiával
- $|\mathcal{P}_n^*| \leq n! \implies H_n^{\mathrm{perm}}(f) \leq \log(n!) \asymp n \cdot \log(n)$
- Példa: $n = 4$, $\pi = (2310)$
  $C(\pi) = \{(2310), (3102), (1023), (0231)\}$

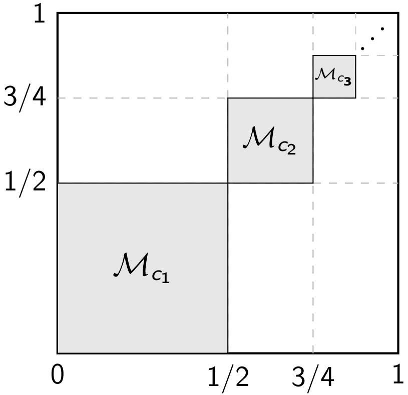


Permuton végtelen permutáció entrópiával

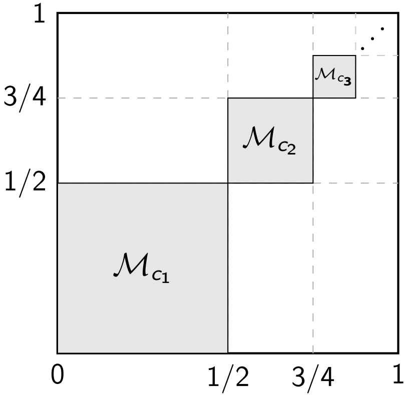
- Ötlet: rögzített n-re permuton maximális entrópiával
- $|\mathcal{P}_n^*| \leq n! \implies H_n^{\mathrm{perm}}(f) \leq \log(n!) \asymp n \cdot \log(n)$
- Példa: $n = 4$, $\pi = (2310)$
  $C(\pi) = \{(2310), (3102), (1023), (0231)\}$



Permuton végtelen permutáció entrópiával



Permuton végtelen permutáció entrópiával



- legyen $c_k = 2^{2^{2^k}}$

Permuton oszcilláló entrópiával

- Cél: μ_f permuton, amire

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_n^{\mathrm{perm}}(f) = \infty \text{ és } \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_n^{\mathrm{perm}}(f) = 0$$

- Ötlet:
  - diadikus felosztás
  - egy részsorozat mentén használjuk az előző konstrukciót!
  - a többi négyzetbe találjunk kellően kis entrópiájú permutonokat

Köszönöm szépen a figyelmet!