

Az étale algebrák Galois-elmélete

Robin Eszter

Témavezető: Tóth Árpád

Forrás: J. S. Milne: Fields and Galois theory

Kategóriaelmélet

Definíció (kategória)

$$\mathcal{C} = (\text{Ob } \mathcal{C}, \text{Mor } \mathcal{C}, \circ, \text{id}_{\mathcal{C}})$$

Példa

1 SET:

- *Ob SET: halmazok*
- *Mor SET: halmazleképezések*

2 TOP_{\bullet} :

- *Ob TOP_{\bullet} : pontozott topologikus terek*
- *Mor TOP_{\bullet} : folytonos leképezések, amelyek a kijelölt pontot a kijelölt pontba viszik*

3 GRP:

- *Ob GRP: csoportok*
- *Mor GRP: csoport homomorfizmusok*

Kategóriaelmélet

Definíció (kategória)

$$\mathcal{C} = (\text{Ob } \mathcal{C}, \text{Mor } \mathcal{C}, \circ, \text{id}_{\mathcal{C}})$$

Példa

1 SET:

- *Ob SET: halmazok*
- *Mor SET: halmazleképezések*

2 TOP_{\bullet} :

- *Ob TOP_{\bullet} : pontozott topologikus terek*
- *Mor TOP_{\bullet} : folytonos leképezések, amelyek a kijelölt pontot a kijelölt pontba viszik*

3 GRP:

- *Ob GRP: csoportok*
- *Mor GRP: csoport homomorfizmusok*

Kategóriaelmélet

Definíció (funktor)

Ha \mathcal{C}, \mathcal{D} kategória, akkor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktor ha

- $F : \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$
- $\forall A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}, f \in \text{Hom}(A, B) : \exists F(f) \in \text{Hom}(F(A), F(B)):$
 - 1 $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
 - 2 $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Példa

- 1 $\pi_1 : \text{TOP}_* \rightarrow \text{GRP}$ a fundamentális csoport
- 2 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B) : \mathcal{C} \rightarrow \text{SET}$

Kategóriaelmélet

Definíció (funktor)

Ha \mathcal{C}, \mathcal{D} kategória, akkor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktor ha

- $F : \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$
- $\forall A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}, f \in \text{Hom}(A, B) : \exists F(f) \in \text{Hom}(F(A), F(B)):$
 - 1 $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
 - 2 $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Példa

- 1 $\pi_1 : \text{TOP}_\bullet \rightarrow \text{GRP}$ a fundamentális csoport
- 2 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B) : \mathcal{C} \rightarrow \text{SET}$

Kategóriaelmélet

Definíció (kontravariáns funktor)

Ha \mathcal{C}, \mathcal{D} kategória, akkor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ kontravariáns funktor ha

- $F : \text{Ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{D}$
- $\forall A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}, f \in \text{Hom}(A, B) : \exists F(f) \in \text{Hom}(F(B), F(A)) :$
 - 1 $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$
 - 2 $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Példa

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{SET}$

Kategóriaelmélet

Definíció (természetes izomorfizmus: $F \sim G$)

$$F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$$

$$\forall A \in \mathbf{Ob} \mathcal{C} : \eta(A) \in \mathbf{Hom}(F(A), G(A))$$

izomorfizmus és

$$\forall A, B \in \mathbf{Ob} \mathcal{C}, \forall f \in \mathbf{Hom}(A, B) : \eta(A) \circ G(f) = F(f) \circ \eta(B).$$

Definíció (ekvivalens kategóriák)

\mathcal{C} és \mathcal{D} ekvivalensek, ha létezik $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ és $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funktor, hogy $G \circ F \sim id_{\mathcal{C}}$ és $F \circ G \sim id_{\mathcal{D}}$.

Fő tétel

Tétel

Az \mathcal{F} funktor az étale F -algebrák kategóriája és a véges G -sets kategóriája között definiál egy kontravariáns ekvivalenciát, \mathcal{A} kvázi-inverzrel.

Étale algebrák

A étale

- 1 $\exists F \subset L : L \otimes A$ is diagonalizálható
- 2 $L \otimes A$ redukált $\forall F \subset L$
- 3 A szeparábilis test bővítések szorzata

G -set

Ω az F algebrai lezártja, $G = \text{Gal}(\Omega/F)$.

$$G(S) := \{\sigma \in G : \sigma s = s \forall s \in S\}.$$

Definíció (G -set)

S egy halmaz, amin G hat úgy, hogy a $G \times S \rightarrow S$ leképezés folytonos a Krull topológiára nézve G -n és a diszkrét topológiára nézve S -en.

Az \mathcal{F} és az \mathcal{A} funktor

$$\mathcal{F}(A) := \{f : A \rightarrow \Omega \text{ } F\text{-algebra homomorfizmus}\}$$

$$\mathcal{A}(S) := \{f \in \text{Hom}(S, \Omega) : f(\sigma s) = \sigma f(s) \forall \sigma \in G, s \in S\}$$

Bizonyítás I.

$$A \simeq \mathcal{A}(\mathcal{F}(A))$$

Bizonyítás

$$(\Omega \otimes A)^G \simeq F \otimes A \simeq A.$$

$$A \simeq (\Omega \otimes A)^G \simeq \left(\prod_{\sigma \in \mathcal{F}(A)} \Omega \right)^G \simeq \mathcal{A}(\mathcal{F}(A)).$$

Bizonyítás II.

$$S \simeq \mathcal{F}(\mathcal{A}(S))$$

Bizonyítás

$$\hat{s} : \mathcal{A}(S) \rightarrow \Omega$$

$$\hat{s}(f) := f(s)$$

Bizonyítás III.

\mathcal{F} bijektív leképezést definiál.

Bizonyítás

$$\text{Hom}_{F\text{-algebra}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{\Omega\text{-algebra}}(\Omega \otimes A, \Omega \otimes B)^G.$$

$$\Omega \otimes A \simeq \prod_{i \in \mathcal{F}(A)} \Omega, \quad \Omega \otimes B \simeq \prod_{j \in \mathcal{F}(B)} \Omega \implies$$

$$\tilde{f} : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(A), \quad f((a_i)_{i \in \mathcal{F}(A)}) := (b_j)_{j \in \mathcal{F}(B)} \text{ ahol } b_j = a_{\tilde{f}(j)}$$

$$\text{Hom}_{\Omega\text{-algebra}}(\Omega \otimes A, \Omega \otimes B)^G \simeq \text{Hom}_{\text{Sets}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))^G.$$

$$\text{Hom}_{F\text{-algebra}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{G\text{-sets}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)).$$

Bizonyítás III.

\mathcal{F} bijektív leképezést definiál.

Bizonyítás

$$\text{Hom}_{F\text{-algebra}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{\Omega\text{-algebra}}(\Omega \otimes A, \Omega \otimes B)^G.$$

$$\Omega \otimes A \simeq \prod_{i \in \mathcal{F}(A)} \Omega, \quad \Omega \otimes B \simeq \prod_{j \in \mathcal{F}(B)} \Omega \implies$$

$$\tilde{f} : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(A), \quad f((a_i)_{i \in \mathcal{F}(A)}) := (b_j)_{j \in \mathcal{F}(B)} \text{ ahol } b_j = a_{\tilde{f}(j)}$$

$$\text{Hom}_{\Omega\text{-algebra}}(\Omega \otimes A, \Omega \otimes B)^G \simeq \text{Hom}_{\text{Sets}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))^G.$$

$$\text{Hom}_{F\text{-algebra}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{G\text{-sets}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)).$$

Bizonyítás III.

\mathcal{F} bijektív leképezést definiál.

Bizonyítás

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}\text{-algebra}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{\Omega\text{-algebra}}(\Omega \otimes A, \Omega \otimes B)^G.$$

$$\Omega \otimes A \simeq \prod_{i \in \mathcal{F}(A)} \Omega, \quad \Omega \otimes B \simeq \prod_{j \in \mathcal{F}(B)} \Omega \implies$$

$$\tilde{f} : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(A), \quad f((a_i)_{i \in \mathcal{F}(A)}) := (b_j)_{j \in \mathcal{F}(B)} \text{ ahol } b_j = a_{\tilde{f}(j)}$$

$$\text{Hom}_{\Omega\text{-algebra}}(\Omega \otimes A, \Omega \otimes B)^G \simeq \text{Hom}_{\text{Sets}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))^G.$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}\text{-algebra}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{G\text{-sets}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)).$$

Bizonyítás III.

\mathcal{F} bijektív leképezést definiál.

Bizonyítás

$$\text{Hom}_{F\text{-algebra}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{\Omega\text{-algebra}}(\Omega \otimes A, \Omega \otimes B)^G.$$

$$\Omega \otimes A \simeq \prod_{i \in \mathcal{F}(A)} \Omega, \quad \Omega \otimes B \simeq \prod_{j \in \mathcal{F}(B)} \Omega \implies$$

$$\tilde{f} : \mathcal{F}(B) \rightarrow \mathcal{F}(A), \quad f((a_i)_{i \in \mathcal{F}(A)}) := (b_j)_{j \in \mathcal{F}(B)} \text{ ahol } b_j = a_{\tilde{f}(j)}$$

$$\text{Hom}_{\Omega\text{-algebra}}(\Omega \otimes A, \Omega \otimes B)^G \simeq \text{Hom}_{\text{Sets}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))^G.$$

$$\text{Hom}_{F\text{-algebra}}(A, B) \simeq \text{Hom}_{G\text{-sets}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)).$$

MI

- Szövegszerkesztés
- Szakirodalom-feldolgozás

Köszönöm szépen a figyelmet!