

NORINE HIPERKOCKA SEJTÉSE

Szabó Blanka

Egyéni kutatómunka 1

Témavezető: Damásdi Gábor

1. Bevezetés

Ebben a félévben Norine hiperkocka sejtésével foglalkoztam, amely hiperkockák élgráfjainak 2 színnel való színezéséről szól.

A d dimenziós hiperkocka élgráfjára gondolhatunk a következőképpen: a hiperkocka csúcsait megfeleltethetjük a $\{0,1\}^d$ vektoroknak, és pontosan akkor vezet két csúcs között él, ha pontosan 1 koordinátában különböznek.

1.1. Definíció. *Két csúcs antipodális, ha minden koordinátában különböznek.*

Az ab és cd él antipodális, ha a és c , valamint b és d antipodális.

1.2. Definíció. *Egy színezés antipodális, ha minden élre teljesül, hogy az adott él és az antipodálisa különböző színű.*

1.3. Definíció. *Egy ab út legfeljebb egyszer vált színt, ha létezik olyan c csúcsa, amire ac és cb egyszínű utak.*

1.4. Definíció. *Egy ab út geodetikus, ha legrövidebb az összes út között, amelyek két végpontja a és b .*

2. Norine hiperkocka sejtése és változatai

Norine 2008-ban fogalmazta meg következő sejtését:

2.1. Sejtés. *A d dimenziós hiperkocka éleinek bármely antipodális, 2 színnel való színezésében létezik egyszínű út két antipodális csúcs között.*

Tetszőleges színezés esetén megfogalmazható a következő sejtés:

2.2. Sejtés. *A d dimenziós hiperkocka éleinek bármely, 2 színnel való színezésében van két antipodális csúcs, amelyek között létezik olyan út, amely legfeljebb egyszer vált színt.*

A 2.2 sejtésből a 2.1 sejtés következik: Ha igaz a 2.2 sejtés, akkor található az antipodális színezésben egy ab út két antipodális csúcs között, amely legfeljebb egyszer vált színt, legyen c , ahol színt vált. Mivel a színezés antipodális, az ac egyszínű út

éleinek antipodálisai által alkotott út a cb úttal együtt egy egyszínű utat alkot.

Ha megköveteljük azt is, hogy az út legyen geodetikus, akkor a következő sejtéseket kapjuk:

2.3. Sejtés. *A d dimenziós hiperkocka éleinek bármely antipodális, 2 színnel való színezésében létezik egyszínű geodetikus út két antipodális csúcs között.*

2.4. Sejtés. *A d dimenziós hiperkocka éleinek bármely, 2 színnel való színezésében van két antipodális csúcs, amelyek között létezik olyan geodetikus út, amely legfeljebb egyszer vált színt.*

A 2.3 sejtés és a 2.4 sejtés ekvivalenciáját Leader és Long bizonyította be.[5]

Nyilvánvaló, hogy a 2.3 sejtésből következik a 2.1 sejtés, valamint a 2.4 sejtésből következik a 2.2 sejtés.

Tehát a 2.3 sejtésből következik a többi három sejtés is.

3. Ismert eredmények

A geodetikus Norine 2.3 sejtést alacsonyabb dimenzióra, $d \leq 5$ esetén 2013-ban Feder és Subi bizonyította be[3], eggyel magasabb dimenzióra 2017-ben West és Wise bizonyította be[4]. A félévben ezeket és a következő cikket dolgoztam fel, melyben a 2.3 sejtést $d = 7$ esetén SAT solver használatával bizonyították be[1].

A félév során a 2.3 sejtést a $d = 8$ esetben terveztük igazolni SAT solver használatával, egy, az előző cikkben szereplőnél jobb szimmetriatörést alkalmazva, viszont 2025 novemberében jelent meg egy cikk[2], amelyben ezt a szimmetriatörést alkalmazzák. A cikk ezenkívül tartalmazza a jelenlegi legjobb eredményt a színváltások számának aszimptotikus közelítésére vonatkozóan:

3.1. Tétel. *A d dimenziós hiperkocka éleinek bármely, 2 színnel való színezésében van két antipodális csúcs, amelyek között létezik olyan út, amely legfeljebb $0.3125d+6$ alkalommal vált színt.*

4. Terv

Megpróbálunk új elméleti ötletekkel előállni, amelyek segíthetik a számítógépes keresést, valamint különböző kombinatorikus és algebrai módszerekkel érdekes színezéseket konstruálni.

Hivatkozások

- [1] Keith Frankston and Danny Scheinerman: Proving Norine’s conjecture holds for $n=7$ via SAT solvers, 2024. <https://arxiv.org/abs/2408.02474>
- [2] Markus Kirchweger, Tomas Peitl, Bernardo Subercasaux and Stefan Szeider: From the finite to the infinite: Sharper asymptotic bounds on Norin’s conjecture via SAT, 2025. <https://arxiv.org/abs/2511.08386>
- [3] Tomás Feder and Carlos Subi: On hypercube labellings and antipodal monochromatic paths, <https://theory.stanford.edu>
- [4] Douglas B. West and Jennifer I. Wise: Antipodal edge-colorings of hypercubes, 2017. <https://dwest.web.illinois.edu/pubs/antip.pdf>
- [5] Imre Leader and Eoin Long: Long geodesics in subgraphs of the cube 2013. <https://arxiv.org/abs/1301.2195v1>