

Egység távolságú gráfok

Gyetzvai Miklós

December 2025

Bevezetés

Definíció

Egy egység távolságú gráf egy olyan gráf, amelynek csúcsai egy d -dimenziós térben helyezkednek el, és két csúcs között akkor lehet él, ha az a két csúcs egység távolságra van egymástól.

A témakörben a vizsgált kérdés, hogy adott feltételek mellett n csúcsú gráf esetén milyen korlátokat tudunk megadni egy egység távolságú gráf maximális éleinek $f_d(n)$ számára.

Ismert eredmények

Első eredmények Erdőstől[3] vannak a síkbeli esetben:

$$n^{1+\frac{c}{\log \log n}} < f_2(n) < n^{\frac{3}{2}}$$

A felső korlát később tovább lett csökkentve [7]

$$f_2(n) < cn^{\frac{4}{3}}$$

Erdős[3] sejtése:

$$f_2(n) < n^{1+o(1)}$$

Térben, D sugarú gömbön az eredmény [6]

$$cn\sqrt{\log n} < f_{3,D}(n) < cn^{\frac{4}{3}}$$

ami D -től független, viszont $D = \sqrt{2}$ esetén tovább javítható az alsó korlát:

$$c_1 n^{\frac{4}{3}} < f_{3,\sqrt{2}}(n) < c_2 n^{\frac{4}{3}}$$

További eredmények:[2][5]

Feltétel	Alsó korlát	Felső korlát
$d = 2$, átmérő 1	n	n
$d = 2$, csúcsok konvex helyzetben	$2n - 7$	$cn \log n$
$d = 2$, nincs három kollineáris csúcs	$c_1 n \log n$	$c_2 n^{\frac{4}{3}}$
$d = 3$	$c_1 n^{\frac{4}{3}} \log \log n$	$c_2 n^{\frac{3}{2}}$
$d = 3$, átmérő 1	$2n - 2$	$2n - 2$
$d = 4$	$\lceil \frac{n^2}{4} \rceil + n - 1$	$\lceil \frac{n^2}{4} \rceil + n$
$d > 4$, $2 \mid d$	$\frac{n^2}{2} (1 - \frac{2}{d}) + n - c_1 d$	$\frac{n^2}{2} (1 - \frac{2}{d}) + n - c_2 d$
$d > 4$, $2 \nmid d$	$\frac{n^2}{2} (1 - \frac{2}{d-1}) + c_1 n^{\frac{4}{3}}$	$\frac{n^2}{2} (1 - \frac{2}{d-1}) + c_2 n^{\frac{4}{3}}$

Tipikus normák

Eddig minden eredmény feltételezte, hogy a téren euklideszi távolság van definiálva, viszont vannak további eredmények, ha az euklideszitől különböző normált tereket vizsgálunk.

Ekkor az alsó korlát:[4]

$$f_{\|\cdot\|_d} > (\frac{d}{2} - c)n \log n$$

Felső korlát pedig Baire-kategóriai értelemben majdnem minden normára tudunk megadni:[1][4]

$$f_{\|\cdot\|_d} < \frac{d}{2} n \log n$$

$$f_{\|\cdot\|_2} = O(n \log n \log \log n)$$

Hivatkozások

- [1] Noga Alon, Matija Bucić, and Lisa Sauermann. *Unit and distinct distances in typical norms*. 2024. arXiv: 2302.09058 [math.CO].
- [2] Herbert Edelsbrunner and Péter Hajnal. “A lower bound on the number of unit distances between the vertices of a convex polygon”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 56.2 (1991), pp. 312–316.
- [3] P. Erdős. “On Sets of Distances of n Points”. In: *The American Mathematical Monthly* 53.5 (1946), pp. 248–250.
- [4] Josef Greilhuber, Carl Schildkraut, and Jonathan Tidor. “More unit distances in arbitrary norms”. In: *Bulletin of the London Mathematical Society* 57.9 (July 2025), pp. 2885–2901.

- [5] János Pach. “Finite Point Configurations”. In: *Handbook of Discrete and Computational Geometry, Second Edition*. Ed. by Jacob E. Goodman and Joseph O’Rourke. Chapman and Hall/CRC, 2004, pp. 3–24.
- [6] Konrad Swanepoel and Pavel Valtr. “The Unit Distance Problem On Spheres”. In: (June 2004).
- [7] László Székely. “Crossing Numbers and Hard Erdos Problems in Discrete Geometry”. In: *Combinatorics, Probability and Computing* 6 (Sept. 1997), pp. 353–358.