# Páronként diszjunkt vektorpárok keresése $\mathbb{F}_2^n$-ben előírt különbségsorozattal

Kovács Benedek

Témavezető: Csikvári Péter
Közreműködő: Zsigri Bálint

2020.12.18.

# Házaspárok leültetése a király asztalához

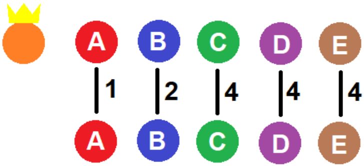
**Probléma (R. Bacher, 2008)**

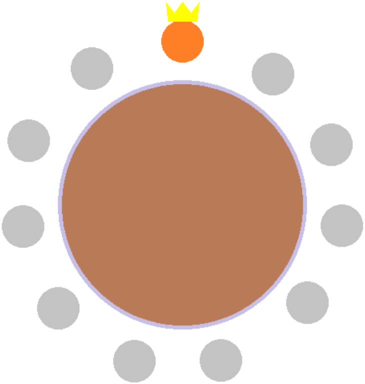
Legyen $p$ páratlan prím és $M = \frac{p-1}{2}$. Igaz-e, hogy akárhogyan is adottak a $d_1$, $d_2$, $d_3$, ..., $d_M$ nemnulla elemek az $\mathbb{F}_p$ testben, a test $2M$ db nemnulla eleme felosztható diszjunkt $(a_i, b_i)$ párokba $(1 \leq i \leq M)$ úgy, hogy minden $i$-re $a_i - b_i = d_i$ legyen?

# Házaspárok leültetése a király asztalához

**Példa**

$p = 11,\ M = 5,\ (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (1, 2, 4, 4, 4)$

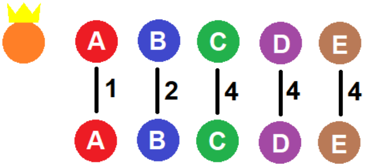


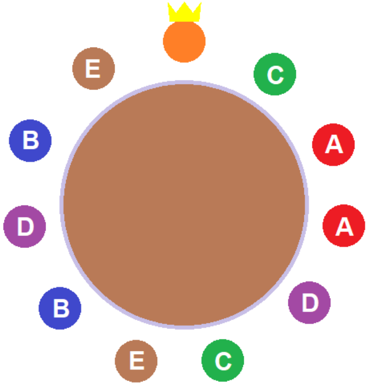



# Házaspárok leültetése a király asztalához

## Példa

$p = 11,\ M = 5,\ (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (1, 2, 4, 4, 4)$




Preissmann, Mischler (2009): Ilyen felosztás mindig létezik.

# Továbbgondolás $\mathbb{F}_p^n$-re

## Probléma

Legyen $p$ páratlan prím, $n \geq 2$ egész és $M = \frac{p^n-1}{2}$. Igaz-e, hogy akárhogyan is adottak a $d_1$, $d_2$, $d_3$, ..., $d_M$ nemnulla elemek $\mathbb{F}_p^n$-ben, a test $2M$ db nemnulla eleme felosztható diszjunkt $(a_i, b_i)$ párokba $(1 \leq i \leq M)$ úgy, hogy minden $i$-re $a_i - b_i = d_i$ legyen?

## Ellenpélda

$\mathbb{F}_3^2$-ben a 8 nemnulla elem nem osztható fel úgy párokra, hogy minden párban $(1, 0)$ legyen a különbség.

## Tétel (Karasev, Petrov, 2012)

Ha minden $i$-re megadunk egy $n$ elemű, csupa lineárisan független vektorból álló listát, melyből $d_i$-t választanunk kell, akkor tudunk úgy választani a listákból, hogy a kapott feladat megoldható legyen.

# A sejtés $\mathbb{F}_2^n$-re

Mi a helyzet $\mathbb{F}_2^n$-ben? Páros sok elem van, így a nullát is bevesszük a párosítandó elemek közé.

**Ellenpélda**

$\mathbb{F}_2^n$-ben az elemek összege 0, így ha $\sum d_i \neq 0$, a feladat megoldhatatlan.

**Sejtés (Balister, Győri, Schelp, 2008)**

A párosítási feladat mindig megoldható, ha $\sum d_i = 0$.

**Az általam vizsgált probléma**

Legyen $n \geq 2$ és $N = 2^n$, és legyenek adottak most csak a $d_1$, $d_2$, ..., $d_M$ nemnulla különbségek, ahol $M < \frac{1}{2}N$. Szeretnénk keresni csupa különböző $a_1, a_2, \ldots, a_M, b_1, b_2, \ldots, b_M$ vektorokat, melyekre minden $i$-re teljesül, hogy $a_i - b_i = d_i$. Maximálisan mekkora $M$-re tudjuk ezt belátni?

# Egyszerű mohó módszer

Az alábbi mohó módszer működik $M \leq \frac{1}{4}N$ esetén: tegyük fel, hogy az $a_1, \ldots, a_{i-1}$ és $b_1, \ldots, b_{i-1}$ különbségeket már kiválasztottuk. Legyen ekkor $\{a_i, b_i\}$ egy tetszőleges $d_i$ különbségű pár, melynek még egyik tagját sem használtuk.
Ekkor sosem akadunk el, hiszen $\frac{1}{2}N$ db $d_i$ különbségű pár létezik $\mathbb{F}_2^n$-ben, és mi eddig még csak $2(i-1) \leq \frac{1}{2}N - 2$ vektort választottunk ki, tehát van még olyan pár, melynek mindkét tagja szabad.

# A háromrészes mohó módszer

**Tétel (saját eredmény, 2020)**

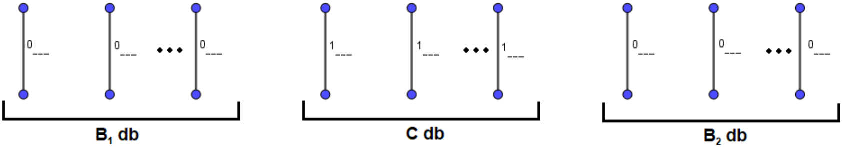
A feladat megoldható $M \leq \frac{5}{18}N$ esetén is.

Legyen adott a $d \in \mathbb{F}_2^n$ nemnulla különbség.

- Ha $d$ 0-val kezdődik, akkor a $d$ különbségű vektorpárok között $2^{n-2}$ db 0-0 pár és $2^{n-2}$ db 1-1 pár van.
- Ha $d$ 1-gyel kezdődik, akkor mind a $2^{n-1}$ db $d$ különbségű vektorpár 0-1 pár.

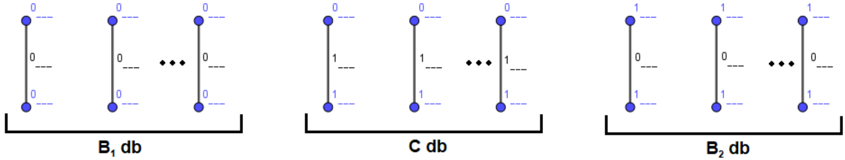
# A háromrészes mohó módszer

Bontsuk három csoportba a megadott különbségvektorokat úgy, hogy az 1. és a 3. csoportba 0-val kezdődő, a 2. csoportba 1-gyel kezdődő vektorok kerüljenek.



# A háromrészes mohó módszer

Bontsuk három csoportba a megadott különbségvektorokat úgy, hogy az 1. és a 3. csoportba 0-val kezdődő, a 2. csoportba 1-gyel kezdődő vektorok kerüljenek.
Majd rendeljünk vektorpárokat az élekhez mohón balról jobbra haladva úgy, hogy az ábrán látható megszorítások teljesüljenek a hozzárendelt vektorok kezdeteire:



# A háromrészes mohó módszer - mikor működik?

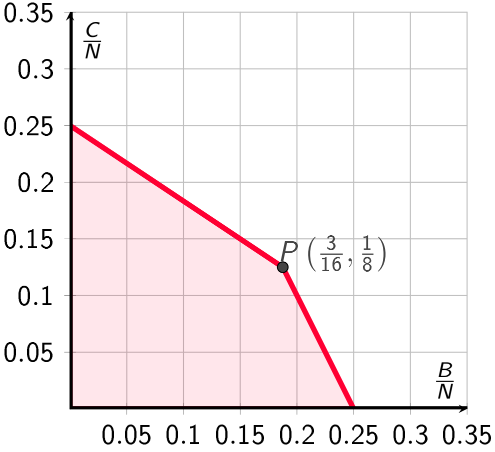
**Állítás**

A háromrészes mohó módszer minden esetben működik, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

- $B_1 \leq \frac{1}{8}N$
- $B_1 + C \leq \frac{1}{4}N$
- $C + 2B_2 \leq \frac{1}{4}N$

Ez alapján a problémát megoldottuk, ha $B + \frac{3}{2}C \leq \frac{3}{8}N$ és $B + \frac{1}{2}C \leq \frac{1}{4}N$, ahol $B$ a 0-val kezdődő és $C$ az 1-gyel kezdődő különbségek száma.

Ez alapján a problémát megoldottuk, ha $B + \frac{3}{2}C \leq \frac{3}{8}N$ és $B + \frac{1}{2}C \leq \frac{1}{4}N$, ahol $B$ a 0-val kezdődő és $C$ az 1-gyel kezdődő különbségek száma.



# Kezdetek arányának szabályozása lineáris transzformációval

**Lemma**

Legyen $\alpha : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ egy $\mathbb{F}_2$-vektortér-automorfizmus. Ekkor a $d_1$, $d_2$, ..., $d_M \in \mathbb{F}_2^n$ különbségekre pontosan akkor oldható meg a probléma, ha az $\alpha(d_1), \alpha(d_2), ..., \alpha(d_M)$ különbségekre megoldható.

Így ha találunk egy $\alpha$ automorfizmust, melyre a különbségek transzformáltjai között a 0-val kezdődőek részaránya beleesik az $[r_{min}(m), r_{max}(m)]$ intervallumba, akkor ezen transzformáció és az előző állítás révén megoldhatjuk a feladatot.

$M = \frac{3}{11}N$ esetén:

- vagy a különbségek egyhatoda mind azonos (ekkor egy mohó jellegű algoritmussal a feladat megoldható),
- vagy pedig létezik transzformáció, amit alkalmazva a 0-val kezdődő különbségek részaránya az $\left[r_{min}\left(\frac{3}{11}\right), r_{max}\left(\frac{3}{11}\right)\right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{5}{6}\right]$ intervallumba kerül.

# Az eredmény javítása $M = \frac{3}{11}N$-ről $M = \frac{5}{18}N$-re

A háromrészes algoritmus első lépésében (amikor 0-0 párokat választunk) mohó helyett tetszőleges jobb módszert is használhatunk. Így rekurzív módon a módszer javítani tudja saját magát:
$\frac{1}{4}N \to \frac{3}{11}N \to \frac{67}{242}N \to \dots$

A határértékben azt kapjuk, hogy minden $M \leq \frac{5}{18}N$ esetén garantáltan megoldható a feladat.