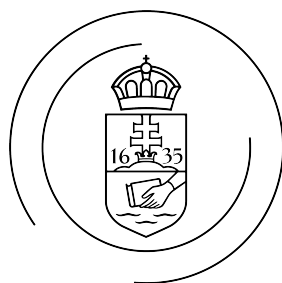


Ciklikus sorrend létezése matroidokban

Varga Péter

Témavezető:
Bérczi Kristóf



ELTE

EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

Budapest
2026

1 Bevezetés

A beszámolóban a matroidokra az $M = (S, r)$ jelölést használjuk, ahol S egy véges *alaphalmaz* és $r : 2^S \rightarrow \mathbb{N}$ a matroid *rangfüggvénye*, ami teljesíti az alábbiakat:

$$(R1) \quad r(\emptyset) = 0$$

$$(R2) \quad r(A) \leq r(A + x) \leq r(A) + 1, \forall A \subseteq S, x \in S$$

$$(R3) \quad r \text{ szubmoduláris, vagyis } r(A) + r(B) \geq r(A \cap B) + r(B \cap A), \forall A, B \subseteq S$$

Továbbá M matroid esetén jelölje $r = r(S)$ a matroid rangját.

Egy $M = (S, r)$ matroid ciklikusan rendezhető, ha létezik az S alaphalmaznak $s_1, \dots, s_n$ ciklus rendezése, amire teljesül, hogy $\forall i \in [n]$ esetén $s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+r-1}$ bázis.

Sejtés 1.1 (Kajitani-Ueno-Miyano [4]). *Egy $M = (S, r)$ matroid akkor és csak akkor ciklikusan rendezhető, ha egyenletesen sűrű.*

Több speciális matroidra is bizonyított a sejtés, például grafikus és split matroidok esetén [1] továbbá, ha $|S|$ és $r(S)$ relatív prímek [5], akkor általánosan is bizonyított.

2 Szükséges feltétel

Definíció 2.1. *Egy $M = (S, r)$ matroid egyenletesen sűrű, ha $\forall X \subseteq S, X \neq \emptyset$:*

$$\frac{|X|}{r(X)} \leq \frac{|S|}{r(S)}.$$

Tétel 2.1. *Ha a $M = (S, r)$ matroid ciklikusan rendezhető, akkor egyenletesen sűrű.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ a matroid bázisainak halmaza, ekkor tetszőleges $X \subseteq S$ halmazra

$$r(X) = \max_{B \in \mathcal{B}} |B \cap X|.$$

Legyen $s_1, \dots, s_{|S|}$ egy ciklikus körberendezés, és $\mathcal{B}' = \{\{s_i, \dots, s_{i+r-1}\} : i \in [|S|]\}$. $X \subseteq S$ esetén:

$$\sum_{B \in \mathcal{B}'} |X \cap B| = |X| \cdot r.$$

Ekkor létezik $B \in \mathcal{B}'$, amire $|X \cap B| \geq \frac{|X| \cdot r}{|\mathcal{B}'|} = \frac{|X| \cdot r}{|S|}$. Előzőek alapján $r(X) \geq |X \cap B|$, tehát

$$\frac{|X|}{r(X)} \leq \frac{|X|}{|B \cap X|} \leq \frac{|X|}{\frac{|X| \cdot r}{|S|}} = \frac{|S|}{r}$$

□

3 Paving matroid

Az egyenletes sűrűség speciális esetekben könnyebben értelmezhető feltételt is adhat, mint a definíció, ezekkel a sejtés ekvivalens átfogalmazásai adhatók.

Definíció 3.1. Egy $M = (S, r)$ matroid paving (nagykörű), ha minden $C \subseteq S$ körre teljesül, hogy $|C| \geq r$.

Tétel 3.1 ([2]). Minden r rangú paving matroid előáll a következő alakban:

- Legyen $(S, \mathcal{H})$ hipergráf, ahol $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$ a hipergráf élei.
- $\forall i, j \in [t], i \neq j : |H_i \cap H_j| \leq r - 2$.

Ekkor $M = (S, \mathcal{B})$ matroid, ahol

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq S : |B| = r \text{ és } \nexists i \in [t] : B \subseteq H_i\}$$

a matroid bázisai.

Megjegyzés. Minden ilyen módon előállított $\mathcal{B} \neq \emptyset$ halmazrendszerrel $M = (S, \mathcal{B})$ matroid.

Következmény. A paving matroidok és az ilyen hipergráfok egyértelműen megfeleltethetők egymásnak.

Tétel 3.2. Legyen $M = (S, r)$ paving matroid, amit a $(S, \mathcal{H})$ hipergráf állít elő. Ekkor M egyenletesen sűrű pontosan akkor, ha teljesül, hogy $\forall H \in \mathcal{H} :$

$$|H| \leq \frac{r-1}{r} \cdot |S|.$$

Bizonyítás. Legyen $X \subseteq S$, ekkor X rangja a következő:

$$r(X) = \begin{cases} \min(r, |X|) & \text{ha } \nexists H \in \mathcal{H} : X \subseteq H \\ \min(r-1, |X|) & \text{ha } \exists H \in \mathcal{H} : X \subseteq H \end{cases}$$

Ha $\nexists H \in \mathcal{H} : X \subseteq H$, akkor

$$\frac{|X|}{\min(|X|, r)} \leq \frac{|S|}{r}$$

minden esetben teljesül. Ha $\exists H \in \mathcal{H} : X \subseteq H$, akkor

$$\frac{|X|}{\min(|X|, r-1)} \leq \frac{|S|}{r}$$

pontosan akkor teljesül, ha $|X| \leq \frac{r-1}{r} \cdot |S|$.

$\Leftrightarrow$

$$|H| \leq \frac{r-1}{r} \cdot |S| \quad \forall H \in \mathcal{H}$$

□

Ezzel a feltétellel a sejtés paving matroidok esetén átfogalmazható hipergráfokra vonatkozó sejtéssé.

Sejtés 3.1. Legyen $(S, \mathcal{H})$ hipergráf és $r \leq |S|$, amikre teljesülnek a következők:

- $\forall H \in \mathcal{H} : |H| \leq \frac{r-1}{r} \cdot |S|$
- $\forall F, H \in \mathcal{H} : |F \cap H| \leq r-2$, ha $F \neq H$.

Akkor teljesül, hogy létezik $s_1, \dots, s_n$ ciklikus rendezése az S alaphalmaznak, hogy minden $B = \{s_i, \dots, s_{i+r-1}\}, i \in [n]$ esetén $\nexists H \in \mathcal{H} : B \subseteq H$.

4 k -fold circuit

Definíció 4.1 ([3]). Legyen $M = (S, r)$ matroid, $D \subseteq S$ egy k -fold circuit, ha $r(D) = |D| - k$, és $\forall e \in S : r(D - e) = r(D)$.

Megjegyzés. Ha $M = (S, r)$ matroid esetén S egy k -fold circuit, akkor M -et is k -fold circuit-nek nevezzük.

Lemma. Legyen $M = (S, r)$ matroid, $D \subseteq S$ egy k -fold circuit, akkor nem létezik $D' \subsetneq D$, amire D' k' -fold circuit, ahol $k' \geq k$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik $D' \subsetneq D$ k' -fold circuit, ekkor $|D'| - r(D') = k'$, vagyis $|D| - |D'| \leq r(D) - r(D')$. Legyen $D \setminus D' = \{e_1, \dots, e_t\}$, ekkor axióma miatt $r(D - e_1 - \dots - e_{t-1}) \leq r(D - e_1 - \dots - e_t) + 1$. Ebből $r(D - e_1) \leq r(D') + |D| - |D'| - 1 \leq r(D) - 1$, vagyis D nem lehet k -fold circuit. $\square$

Definíció 4.2. Legyen $M = (S, \mathcal{C})$ matroid, ahol S a matroid alaphalmaza $\mathcal{C}$ pedig a matroid körei. Legyen $\sim_{\mathcal{C}}$ ekvivalencia reláció, ahol $x, y \in S$:

$$x \sim_{\mathcal{C}} y \iff \{C \in \mathcal{C} : x \in C\} = \{C \in \mathcal{C} : y \in C\}$$

Állítás 4.1. Legyen $M = (S, r)$ matroid egy k -fold circuit és M köreinek halmaza legyen $\mathcal{C}$. Legyen $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_t\}$ az $\sim_{\mathcal{C}}$ ekvivalencia reláció osztályai. Ekkor az S -beli $(k-1)$ -fold circuit-ek pontosan az $S - A_i$ halmazok $\forall i \in [t]$.

Bizonyítás. Legyen $A_i = \{e_1, \dots, e_m\}$, ekkor $S - e_1$ -ben az $\{e_2, \dots, e_m\}$ elemeket már nem tartalmazza kör, vagyis $\forall i \in [2, m]$ teljesül, hogy $r(S - e_1 - e_i) = r(S - e_1) - 1 \forall i \in [2, m]$. Másképpen A_i bármely elemét törölve a maradék elemek coloop-ok. Vagyis $r(S \setminus A_i) = r(S) - |A_i| + 1$ és minden $e \in S \setminus A_i$ esetén létezik $C \in \mathcal{C}$, amire $e \in C$ és $C \cap A_i = \emptyset$, vagyis $S - A_i$ -ben nincsen coloop. Ebből következik, hogy $|S \setminus A_i| - r(S \setminus A_i) = |S| - |A_i| - r(S) + |A_i| - 1 = k - 1$, tehát $S \setminus A_i$ $(k-1)$ -fold circuit.

Legyen $D \subsetneq S$ egy $(k-1)$ -fold circuit, ekkor $A_i \cap D = A_i$ vagy $A_i \cap D = \emptyset$ minden $A_i \in \mathcal{A}$ -ra. Tegyük fel, hogy létezik $A_i \in \mathcal{A}$, amire $\emptyset \neq A_i \cap D \subsetneq A_i$, ekkor $e \in D \cap A_i$ coloop, mivel nincsen kör D -ben, ami tartalmazná, vagyis D nem lehet $(k-1)$ -fold circuit.

Ha D egy $(k-1)$ fold circuit, akkor pontosan egy $A_i \in \mathcal{A}$ létezik, amire $A_i \cap D = \emptyset$. Tegyük fel, hogy $S \setminus D = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_l}$, akkor $r(D) \geq r(S) - |A_{i_1}| - \dots - |A_{i_l}| + 2$, mert az A_{i_1} és A_{i_2} törlésekor még biztosan van olyan elem, ami nem csökkenti a rangot, tehát $|D| - r(D) \leq k - 2$. $\square$

Megjegyzés. Legyen $M = (S, r)$ matroid és $D \subseteq S$ egy k -fold circuit, ekkor a $(k-1)$ -fold circuit-ek komplementerei D -ben partíciót alkotnak.

Állítás 4.2. Legyen $M = (S, r)$ matroid egyenletesen sűrű, ekkor S egy $(|S| - r)$ -fold circuit.

Bizonyítás. Csak annak kell teljesülnie, hogy $\forall e \in S : r(S - e) = r$. Tegyük fel, hogy $e \in S$ -re nem teljesül, ekkor

$$\frac{|S - e|}{r(S - e)} = \frac{|S| - 1}{r(S) - 1} \geq \frac{|S|}{r(S)},$$

vagyis nem teljesül az egyenletes sűrűség. $\square$

Tétel 4.1. Legyen $M = (S, r)$ matroid k -fold circuit, ekkor M egyenletesen sűrű akkor és csak akkor, ha $\forall D \subseteq S$, ahol D egy l -fold circuit teljesül, hogy:

$$|D| \geq \frac{l}{k} \cdot |S|$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk azon $D \subseteq S$ halmazokat, amikre $|D| - r(D) = l$, ezek közül elegendő a tartalmazásra nézve minimálisakat vizsgálni, hiszen ha $D' \subsetneq D$ és $|D'| - r(D') = l$, akkor

$$\frac{|D|}{r(D)} \leq \frac{|D'|}{r(D')}.$$

A tartalmazásra nézve minimális ilyen D halmazok pontosan az l -fold circuit-ek, mivel D pontosan akkor nem l -fold circuit, ha $\exists e \in D : r(D - e) = r(D) - 1$, ekkor $D' = D - e$, tartalmazásra nézve kisebb.

Az egyenletes sűrűséghez teljesülnie kell, hogy

$$\begin{aligned} \frac{|D|}{|D| - l} &\leq \frac{|S|}{r} \\ |D| &\geq l \cdot \frac{|S|}{r - |S|} = \frac{l}{k} \cdot |S| \end{aligned}$$

$\square$

A k -fold circuit-ek a következő ekvivalens átfogalmazást adják a sejtésére.

Sejtés 4.1. Legyen $M = (S, r)$ egy k -fold circuit, amire minden $l \leq k$ esetén az összes $D \subseteq S$ l -fold circuit-re teljesül, hogy

$$|D| \geq \frac{l}{k} \cdot |S|.$$

Akkor M -nek létezik ciklikus sorbarendezése.

Megjegyzés. 2-fold circuit-re be lehet látni a sejtést a méretkorlátok alapján.

References

- [1] Kristóf Bérczi, Áron Jánosik, and Bence Mátravölgyi. Cyclic ordering of split matroids, 2024.
- [2] Andras Frank. Connections in combinatorial optimization. *Discrete Applied Mathematics*, 160:1875, 08 2012.
- [3] Bill Jackson, Anthony Nixon, and Ben Smith. k -fold circuits in matroids, 2024.
- [4] Yoji Kajitani, Shuichi Ueno, and Hiroshi Miyano. Ordering of the elements of a matroid such that its consecutive w elements are independent. In J. Akiyama, Y. Egawa, and H. Enomoto, editors, *Graph Theory and Applications*, volume 38 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 187–194. Elsevier, 1988.
- [5] Jan van den Heuvel and Stéphan Thomassé. Cyclic orderings and cyclic arboricity of matroids, 2011.