

Ciklikus sorrend létezése matroidokban

Varga Péter

Témavezető: Bérczi Kristóf

2025. január 9.

Definíció

Adott egy S véges halmaz és részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Az $M = (S, \mathcal{F})$ párt matroidnak nevezzük, ha fennáll a következő három tulajdonság.

- 1 $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- 2 Ha $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$, akkor $X \in \mathcal{F}$.
- 3 Minden $X \subseteq S$ részhalmazra az $\mathcal{F}$ -nek X -ben fekvő, X -ben legbővebb tagjai azonos elemszámúak.

Definíció

A matroid r rang függvénye

$$r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F}\}$$

Definíció

Az $M = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ matroid egyenletesen sűrű, ha teljesül, hogy
 $\forall \emptyset \neq X \subseteq \mathcal{S}$

$$\frac{|X|}{r(X)} \leq \frac{|\mathcal{S}|}{r(\mathcal{S})}$$

Definíció

Az $M = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ matroid egyenletesen sűrű, ha teljesül, hogy
 $\forall \emptyset \neq X \subseteq \mathcal{S}$

$$\frac{|X|}{r(X)} \leq \frac{|\mathcal{S}|}{r(\mathcal{S})}$$

Megjegyzés

Ekkor a matroid fedhető minimális darab független halmazzal.

Definíció

Egy matroid ciklikusan rendezhető, ha létezik az $\mathcal{S}$ alaphalmaznak $s_1, \dots, s_n$ ciklikus rendezése, hogy $\forall i \in [n] : \{s_i, \dots, s_{i+r-1}\}$ bázis.

Sejtés (Kajitani-Ueno-Miyano)

Az $M = (\mathcal{S}, r)$ matroid akkor és csak akkor ciklikusan rendezhető, ha egyenletesen sűrű.

Ciklikus rendezés

Definíció

Egy matroid ciklikusan rendezhető, ha létezik az $\mathcal{S}$ alaphalmaznak $s_1, \dots, s_n$ ciklikus rendezése, hogy $\forall i \in [n] : \{s_i, \dots, s_{i+r-1}\}$ bázis.

Sejtés (Kajitani-Ueno-Miyano)

Az $M = (\mathcal{S}, r)$ matroid akkor és csak akkor ciklikusan rendezhető, ha egyenletesen sűrű.

Megjegyzés

Az egyenletes sűrűség szükséges feltétel.

Megjegyzés

A sejtés bizonyított grafikus és split matroidok esetén, továbbá ha $|\mathcal{S}|$ és $r(\mathcal{S})$ relatív prímek, akkor általánosan is.

Paving matroid

Definíció

Az $M = (\mathcal{S}, r)$ matroid paving, ha $\forall X \subseteq \mathcal{S}, |X| < r$ esetén X független.

Definíció

- 1 Legyen $(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ hipergráf, ahol $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$.
- 2 $\forall i < j : |H_i \cap H_j| \leq r - 2$.

Ekkor $M = (\mathcal{S}, \mathcal{B})$ egy matroid, ahol

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq \mathcal{S} : |B| = r, \nexists H \in \mathcal{H} : B \subseteq H\}$$

Megjegyzés

Minden paving matroid előáll ilyen alakban.

Állítás

Egy paving matroid egyenletesen sűrű, ha

$$\forall H \in \mathcal{H} : |H| \leq \frac{r-1}{r} |\mathcal{S}|$$

Állítás

Egy paving matroid egyenletesen sűrű, ha

$$\forall H \in \mathcal{H} : |H| \leq \frac{r-1}{r} |\mathcal{S}|$$

Sejtés

Legyen $(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ hipergráf, $r < |\mathcal{S}|$, amire:

- ① $\forall H \in \mathcal{H} : |H| \leq \frac{r-1}{r} |\mathcal{S}|$.
- ② $\forall F, H \in \mathcal{H} : |F \cap H| \leq r-2$, ha $F \neq H$.

Ekkor létezik $s_1, \dots, s_n$ ciklikus rendezése az $\mathcal{S}$ alaphalmaznak, amire $B = \{s_i, \dots, s_{i+r-1}\}$, $i \in [n]$ esetén $\nexists H \in \mathcal{H} : B \subseteq H$.

Sejtés paving matroidokon

Állítás

Egy paving matroid egyenletesen sűrű, ha

$$\forall H \in \mathcal{H} : |H| \leq \frac{r-1}{r} |\mathcal{S}|$$

Sejtés

Legyen $(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ hipergráf, $r < |\mathcal{S}|$, amire:

- ① $\forall H \in \mathcal{H} : |H| \leq \frac{r-1}{r} |\mathcal{S}|$.
- ② $\forall F, H \in \mathcal{H} : |F \cap H| \leq r-2$, ha $F \neq H$.

Ekkor létezik $s_1, \dots, s_n$ ciklikus rendezése az $\mathcal{S}$ alaphalmaznak, amire $B = \{s_i, \dots, s_{i+r-1}\}$, $i \in [n]$ esetén $\nexists H \in \mathcal{H} : B \subseteq H$.

Megjegyzés

Elegendő nem bővíthető $(\mathcal{S}, \mathcal{H})$ hipergráfokra vizsgálni.

Definíció

Legyen $M = (\mathcal{S}, r)$ matroid, $D \subseteq \mathcal{S}$ egy k -fold circuit, ha $r(D) = |D| - k$ és $\forall e \in \mathcal{S} : r(D - e) = r(D)$.

Tétel

$M = (\mathcal{S}, r)$ k -fold circuit, ekkor legyen $\mathcal{D}$ a $(k - 1)$ -fold circuit-ek halmaza, ekkor $\mathcal{A} = \{\mathcal{S} \setminus D : D \in \mathcal{D}\}$ egy partíciója $\mathcal{S}$ -nek.

Megjegyzés

Egy egyenletesen sűrű $M = (\mathcal{S}, r)$ matroid $(|\mathcal{S}| - r)$ -fold circuit.

Állítás

Egy k -fold circuit, akkor egyenletesen sűrű, ha minden $l < k$ esetén, minden $D_l \subseteq \mathcal{S}$ l -fold circuit-re teljesül, hogy

$$|D_l| \geq \frac{l}{k} |\mathcal{S}|$$

Sejtés

Legyen $M = (\mathcal{S}, r)$ egy k -fold circuit, ekkor ha minden $l < k$ esetén az összes $D_l \subseteq \mathcal{S}$ l -fold circuit-re teljesül a méret feltétel, akkor M -nek létezik ciklikus rendezése.

- Paving matroid
 - Paving matroidoknál, r -uniform hipergráfban kell hamilton-láncot keresni. (Megfelelően kicsi $\frac{r}{|S|}$ esetén méretkorlát.)
 - Ha létezik maximális méretű hiperél.

- Paving matroid
 - Paving matroidoknál, r -uniform hipergráfban kell hamilton-láncot keresni. (Megfelelően kicsi $\frac{r}{|S|}$ esetén méretkorlát.)
 - Ha létezik maximális méretű hiperél.
- k -fold circuit
 - 2-fold circuit-ek esetén igaz a sejtés.
 - Ha a matroid 0, 1, 2-fold circuit-ek direkt összege.
 - Ha létezik maximális méretű $(k - 1)$ -fold circuit.

Köszönöm a figyelmet.