# Pozitív operátorok lokálisan konvex tereken

Göde Ábel

2020. december 7.

## 1. Bevezetés

Hilbert-terek elméletéből ismert az úgynevezett pozitív operátor fogalma: egy $A \in B(H)$ operátor pozitív amennyiben $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ minden $x \in H$ elemre. Ezt a fogalmat általánosíthatjuk lokálisan konvex topologikus vektorterek között ható operátorokra, ahol a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ egy anti-dualitást jelöl. Munkám során ezen operátorok kiterjeszthetőségét vizsgáltam. Ehhez Tarcsay Zsigmond és Titkos Tamás három nemrég megjelent cikkét dolgoztam fel.

## 2. Operátorok kiterjesztése anti-duális párokon

Anti-duális pár alatt egy $(E, F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ hármast értünk, ahol $E$ és $F$ komplex vektorterek, $\langle\cdot,\cdot\rangle : F \times E \to \mathbb{C}$ szeparáló szeszkvilineáris függvény. Ezt röviden $\langle F, E\rangle$-vel jelöljük. Megjegyezzük, hogy ekkor $E$ algebrailag azonosítható $F$ algebrai duálisának egy lineáris alterével, illetve megadható rajta olyan topológia, amelyre nézve $F$ elemei folytonos funkcionálok, sőt, az ilyen tulajdonságú topológiák között van leggyengébb, amit az $(E,F)$ párhoz tartozó gyenge topológiának nevezünk és $\sigma(E,F)$-fel jelölünk. Hasonlóan, $F$ is azonosítható $E$ konjugált algebrai duálisának egy alterével, és ha $F$-et ellátjuk a $\sigma(F,E)$ gyenge topológiával, akkor $E$ elemei folytonos funkcionálok $F$-en. A folytonos lineáris funkcionálok által meghatározott gyenge topológiát gyenge-*-topológiának vagy $w^*$-topológiának nevezzük. Ezen kívül még többféle releváns lokálisan konvex topológiát is megadhatunk anti-duális párokon, de mi a gyenge topológia mellett csak a $\beta(E,F)$ illetve $\beta(F,E)$ erős topológiákat használjuk.
Anti-duális párokon a Hilbert-terekhez hasonlóan értelmezhető a pozitív és a szimmetrikus operátor fogalma, méghozzá az alábbi módon. Legyen $A : E \supseteq dom(A) \to F$ operátor. Azt mondjuk, hogy $A$ pozitív, ha

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in dom(A), \tag{1}$$

és $A$ szimmetrikus, ha

$$\langle Ax, y \rangle = \overline{\langle Ay, x \rangle} \quad \forall x, y \in dom(A). \tag{2}$$

Megjegyezzük, hogy minden pozitív operátor szimmetrikus. Abban a speciális esetben, amikor $E = F = H$ Hilbert tér, megkapjuk a $B(H)$-beli pozitív illetve szimmetrikus operátor fogalmát.
Azt mondjuk, hogy $A$ gyengén folytonos, ha folytonos az $E$-n és $F$-en értelmezett gyenge topológiára nézve. A gyengén folytonos, lineáris $E \to F$ operátorok halmazát $\mathscr{L}(E,F)$-fel jelöljük. Egy $A \in \mathscr{L}(E,F)$ operátor adjungáltja az az $A^*$ operátor, melyre $\langle Ax, y \rangle = \overline{\langle A^* y, x \rangle} \quad x, y \in E$. A Hilbert-terek elméletében ismert Hellinger-Toeplitz tétel egy messzemenő általánosítása az a tény, hogy egy az $E$-n mindenütt értelmezett önadjungált (tehát minden pozitív) operátor automatikusan gyengén folytonos. Ez is indokolja a gyenge topológiák használatát.
A feldolgozott cikkek egyik alapkérdése, hogy egy $A : E \supseteq dom(A) \to F$ lineáris operátornak milyen esetben létezik pozitív illetve önadjungált kiterjesztése $E$-re. Az alábbi tételek igazolhatóak.

**2.1. TÉTEL.** *Legyen $\langle F, E \rangle$ w*-sorozatteljes anti-duális pár, $A : E \supseteq dom(A) \to F$ lineáris operátor, ahol $dom(A) \subseteq E$ lineáris altér, és*

$$W(A) := \{Ax | x \in dom(A), \langle Ax, x \rangle \leq 1\} \subseteq F. \tag{3}$$

*Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*
*(i) létezik $\tilde{A} : E \to F$ pozitív operátor, amelyre $\tilde{A}|_{dom(A)} = A$,*
*(ii) $W(A)$ $\beta(F,E)$-korlátos $F$-ben,*
*(iii) $W(A)$ $\sigma(F,E)$-korlátos $F$-ben,*
*(iv) minden $y \in E$ elemhez létezik olyan $M_y \geq 0$, hogy*

$$|\langle Ax, y \rangle|^2 \leq M_y \langle Ax, x \rangle \quad \forall x \in dom(A). \tag{4}$$

*Amennyiben ezek a feltételek teljesülnek, létezik $A_N$ Krein-Neumann kiterjesztés, amire $A_N \leq \tilde{A}$ teljesül minden $\tilde{A} : E \to F$ kiterjesztés esetén.*

Legyen $A \in \mathscr{L}(E,F)$ rögzített pozitív operátor. Azt mondjuk, hogy az $S_0 : E \supseteq dom(S_0) \to F$ szimmetrikus operátor $A$ által dominált, ha

$$|\langle S_0 x, y \rangle|^2 \leq \alpha^2 \langle Ax, x \rangle \langle Ay, y \rangle \quad \forall x \in dom(S_0), y \in E \tag{5}$$

fennáll. A legkisebb ilyen $\alpha$ konstanst nevezzük az $S_0$ operátor $A$-korlátjának és $\alpha_A(S_0)$-lal jelöljük.

**2.2. TÉTEL.** *Legyen $\langle F, E \rangle$ w*-sorozatteljes anti-duális pár, $A \in \mathscr{L}(E,F)$ és $S_0 : E \supseteq dom(S_0) \to F$ $A$ által dominált szimmetrikus operátor. Ekkor $S_0$-nak léteznek $S_m, S_M \in \mathscr{L}(E,F)$ különböző kiterjesztései, melyekre*

$$\alpha_A(S_m) = \alpha_A(S_M) = \alpha_A(S), \tag{6}$$

*továbbá $S_0$ önadjungált kiterjesztéseire fennáll*

$$[S_m, S_M] = \{S_0 \subset S = S^*, \alpha_A(S) = \alpha_A(S_0)\}. \tag{7}$$

Legyen $A,B,C \in \mathscr{L}(E,F)$, és tekintsük a belőlük álló $\begin{bmatrix} A & B \\ C & * \end{bmatrix}$ hiányos operátormátrixot (vagy operátorrendszert). Egy ilyen rendszert pozitívnak nevezünk, ha létezik olyan $D \in \mathscr{L}(E,F)$, amire $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ pozitív. Ennek nyilván szükséges feltétele, hogy $A$ pozitív és $C = B^*$, ezért innentől az $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & * \end{bmatrix}$ esetre szorítkozunk.
Amennyiben $\langle E_1, F_1 \rangle$ és $\langle E_2, F_2 \rangle$ w*-sorozatteljes anti-duális párok, $A \in \mathscr{L}(E_1, F_1) \geq 0$, és $B \in \mathscr{L}(E_1, F_2)$ pedig gyengén folytonos operátorok, az $\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & * \end{bmatrix}$ rendszer pozitivitásának szükséges és elégséges feltétele az alábbi:
Minden $y_2 \in E_2$ elemhez létezik olyan $M_{y_2} \geq 0$ konstans, amire

$$|\langle Bx_1, y_2 \rangle|^2 \leq M_{y_2} \langle Ax_1, x_2 \rangle \quad \forall x_1 \in E_1. \tag{8}$$

# Hivatkozások


[1] Tarcsay Zsigmond, Titkos Tamás
Operators on anti-dual pairs: Generalised Krein-von Neumann extension,
Mathematische Nachrichten, 2020, megjelenés alatt

[2] Tarcsay Zsigmond, Titkos Tamás
Operators on anti-dual pairs: Self-adjoint Extensions and the Strong Parrott Theorem,
Canad. Math. Bull. 63 (4) (2020), 813-824.

[3] Tarcsay Zsigmond, Titkos Tamás
Operators on anti-dual pairs: Generalized Schur Complement,
Linear Algebra Appl. (2020)

[4] Kristóf János
A matematikai analízis elemei IV.