Pozitív operátorok lokálisan konvex tereken

Göde Ábel

.

Témavezető: Tarcsay Zsigmond

Pozitív operátorok

Hilbert-téren pozitívnak nevezünk egy A operátort, ha

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$$

Ezt a fogalmat kiterjeszthetjük lokálisan konvex topologikus vektorterek között ható operátorokra. Itt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anti-dualitást jelöl.
Ebben a témában Tarcsay Zsigmond és Titkos Tamás három cikkét dolgoztam fel.

Anti-duális pár

Anti-duális pár egy $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hármas, ahol E és F vektorterek, és $\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times E \to \mathbb{C}$ szeszkvilineáris függvény, ami szeparálja az E és F tereket. A továbbiakban $\langle F, E \rangle$.
Ekkor E azonosítható F algebrai duálisának egy lineáris alterével, illetve F azonosítható E algebrai duálisának egy lineáris alterével.
Ekkor egy $A : E \supseteq dom(A) \to F$ operátor pozitív, ha

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in dom(A)$$

Gyenge és erős topológiák

Ha egy X vektortéren adott függvények $(f_i)_{i \in I}$ családja, akkor van leggyengébb topológia X-en, melyre ezek mindegyike folytonos. Ezt a függvénycsalád által meghatározott gyenge topológiának nevezzük.
$\sigma(E, F)$ jelöli az E vektortéren értelmezett, F által meghatározott gyenge topológiát, és $\sigma(F, E)$ jelöli az F vektortéren értelmezett, E által meghatározott gyenge topológiát.
Fontos szerepet kap emellett az úgynevezett erős topológia, melyet $\beta(E, F)$ illetve $\beta(F, E)$ jelöl.

Pozitív operátor kiterjesztése Hilbert-térben

Hilbert-térben is megfogalmazhatjuk a kérdést:
Mikor létezik egy $A : D \to H$ pozitív operátornak $\tilde{A} : H \to H$ poztitív kiterjesztése, ahol D a H Hilbert-tér egy zárt altere.
Mivel Hilbert-térben vagyunk, ennek megválaszolásához felbonthatjuk az A operátort $A_{11} : D \to D$ és $A_{21} : D^{\perp} \to D$ operátorokra.

Ugyanez anti-duális párok esetén

Tétel

Legyen $\langle F, E\rangle$ *w^*-sorozatteljes anti-duális pár,*
$A : E \supseteq dom(A) \to F$ *lineáris operátor, ahol* $dom(A) \subseteq E$ *lineáris altér, és*

$$W(A) := \{Ax | x \in dom(A), \langle Ax, x\rangle \leq 1\} \subseteq F. \tag{1}$$

Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:
(i) létezik $\tilde{A} : E \to F$ *pozitív operátor, amelyre* $\tilde{A}|_{dom(A)} = A$*,*
(ii) $W(A)$ $\beta(F, E)$*-korlátos* F*-ben,*
(iii) $W(A)$ $\sigma(F, E)$*-korlátos* F*-ben,*
(iv) minden $y \in E$ *elemhez létezik olyan* $M_y \geq 0$*, hogy*

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq M_y \langle Ax, x\rangle \quad \forall x \in dom(A). \tag{2}$$

Amennyiben ezek a feltételek teljesülnek, létezik A_N *Krein-Neumann kiterjesztés, amire* $A_N \leq \tilde{A}$ *teljesül minden* $\tilde{A} : E \to F$ *kiterjesztés esetén.*

Szimmetrikus operátorok

Egy $A : E \supseteq dom(A) \to F$ operátor szimmetrikus, ha

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{\langle Ay, x\rangle} \quad \forall x, y \in dom(A)$$

Minden pozitív operátor szimmetrikus.
Legyen $A : E \to F$ operátor rögzített. Azt mondjuk, hogy az $S_0 : E \supseteq dom(S_0) \to F$ szimmetrikus operátor A által dominált, ha

$$|\langle S_0x, y\rangle|^2 \leq \alpha^2\langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle \quad \forall x \in dom(S_0), y \in E$$

$\alpha_A(S_0)$ az S_0 operátor A-korlátja, a legkisebb ilyen α.

Szimmetrikus operátorok kiterjesztése

Tétel

Legyen $\langle F, E\rangle$ *w^*-sorozatteljes anti-duális pár,* $A \in \mathcal{L}(E, F)$ *és* $S_0 : E \supseteq dom(S_0) \to F$ *A által dominált szimmetrikus operátor. Ekkor S_0-nak léteznek* $S_m, S_M \in \mathcal{L}(E, F)$ *különböző kiterjesztései, melyekre*

$$\alpha_A(S_m) = \alpha_A(S_M) = \alpha_A(S), \tag{3}$$

továbbá S_0 önadjungált kiterjesztéseire fennáll

$$[S_m, S_M] = \{S_0 \subset S = S^*, \alpha_A(S) = \alpha_A(S_0)\}. \tag{4}$$